

Kapitel L

Fundamentalgruppen topologischer Räume

Heinz (29 Jahre alt): Ich ziehe so eine Art unsichtbare Linie hinter mir her. [...] Und dann habe ich einmal probiert, um eine Litfaßsäule herumzugehen, und schon hatte ich den Salat. Die Linie war verwickelt. [...] Wenn ich zum Beispiel zur Arbeit fahre, morgens, dann versuche ich abends exakt denselben Weg zurückzufahren, um die Linie wieder aufzusammeln.

Jürgen Domian, *Extreme Leben* (1996)

Inhalt dieses Kapitels L

L002

- 1 Das Fundamentalgruppoid eines Raumes
- 2 Die Fundamentalgruppe eines punktierten Raumes
- 3 Präsentationen von Gruppen
- 4 Polygonale Fundamentalgruppen
- 5 Wegintegrale und Potentiale von Vektorfeldern
- 6 Simpliciale Fundamentalgruppen

Wege beschreiben, wie wir uns bewegen, etwas tun, Dinge verarbeiten. *Methode* kommt von altgr. μετα [metá] ‘über’ und ὁδός [hodós] ‘Weg’. Bislang nutzen wir Wege, hier also stetige Abbildungen $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, vorrangig um den Wegzusammenhang eines Raumes X zu behandeln. Doch Wege leisten noch viel mehr: Wir können mit Wegen rechnen! Diese fundamentale Idee ist Gegenstand des vorliegenden Kapitels.

In Analysis und Physik nutzen wir Wege für **Wegintegrale** und lösen damit das Potentialproblem für Vektorfelder: Genau dann besitzt das $\mathcal{C}^0$ -Vektorfeld $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$ -Potential $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$, wenn das Wegintegral $\int_{\gamma} f \cdot d\gamma$ verschwindet entlang jedes geschlossenen Weges γ in U . In diesem Falle erhalten wir das ersehnte Potential F durch das (nun wegunabhängige!) Wegintegral

$$F(x) = F(x_0) + \int_{s=x_0}^x f(s) \cdot ds.$$

Umgekehrt gesehen: Mit geeigneten Vektorfeldern können wir Wege untersuchen und so zum Beispiel die Umlaufzahl bestimmen, siehe J118.

Für Wege haben wir drei grundlegende **Operationen**: den konstanten Weg 1_a , die Wegumkehr $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ sowie die Aneinanderhängung $\alpha * \beta$. Wegverbindbarkeit ist demnach reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Äquivalenzklassen sind die Wegkomponenten des Raums X (G2F).

In der Topologie nutzen wir Wege zunächst für $\pi_0(X)$ und dann für die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(X, x_0)$ und ebenso elegant wie allgemein für das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ eines Raumes X . Dies wollen wir erklären, erst sorgsam definieren, dann effizient berechnen. Dabei wiederholen sich die obigen drei Operationen nun für Homotopien von Wegen!

Ausblick: Diese Theorie lässt sich in höherer Dimension weiter treiben. Dies nutzt man in so diversen Gebieten wie der Algebraischen Topologie, der höheren Kategorientheorie und der Logik / Homotopietypentheorie (*Homotopy Type Theory*, kurz *HoTT*). Wege beschreiben Umformungen, Programme, Beweise, Die HoTT tritt an als konstruktive Alternative zur bewährten Mengenlehre, als Grundlage für die gesamte Mathematik, insbesondere als Brücke zur Informatik und zu Beweisassistenten.

Die Algebraische Topologie untersucht topologische Räume und ihre stetigen Abbildungen durch die Übersetzung in algebraische Objekte und ihre Homomorphismen. Jedem topologischen Raum X wird hierzu ein algebraisches Objekt $F(X)$ zugeordnet, typischerweise eine Gruppe wie $\pi_1(X, x_0)$ oder je nach Situation auch nur eine Menge wie $\pi_0(X)$ oder sogar ein Ring wie $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Zudem wird jeder stetigen Abbildung $g : X \rightarrow Y$ ein Homomorphismus $F(g) : F(X) \rightarrow F(Y)$ zugeordnet.

Diese Zuordnung soll *funktoriell* sein, das heißt, die Komposition stetiger Abbildungen $g : X \rightarrow Y$ und $h : Y \rightarrow Z$ soll übergehen in die Komposition von Homomorphismen, also $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$. Die identische Abbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ soll natürlich übergehen in den identischen Homomorphismus $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$. Wir sagen zusammenfassend, F ist ein *Funktor* von der Kategorie Top der topologischen Räume in die Kategorie Grp der Gruppen (bzw. Mengen, Ringe, ...).

Der Funktor F leistet die ersehnte Übersetzung.

In diesem Kapitel führen wir die *Fundamentalgruppe* ein und lernen so den Funktor $\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ kennen. Dieser ist, wie der Name andeutet, für die Topologie von fundamentaler Bedeutung. Im nächsten Kapitel werden wir diese Entwicklung fortführen durch das duale Konzept der Überlagerungen und in gewisser Weise vollenden.

Ein solcher Funktor liefert ein algebraisches Abbild des ursprünglich topologischen Sachverhalts. Oft ist das algebraische Abbild größer, somit leichter zu verstehen, und erlaubt eine Lösung des Problems. Die Fundamentalgruppe unterscheidet zum Beispiel bequem und präzise alle geschlossenen Flächen, damit vollenden wir die Klassifikation (L6N).

In günstigen Fällen funktioniert die Übersetzung auch umgekehrt, und die Topologie erleuchtet die Algebra, wie im Satz von Nielsen-Schreier (M5D). Seine Aussage ist rein algebraisch: In jeder freien Gruppe ist jede Untergruppe frei. Der Beweis hingegen gelingt am besten topologisch, mit der Fundamentalgruppe und Überlagerungen von Graphen.

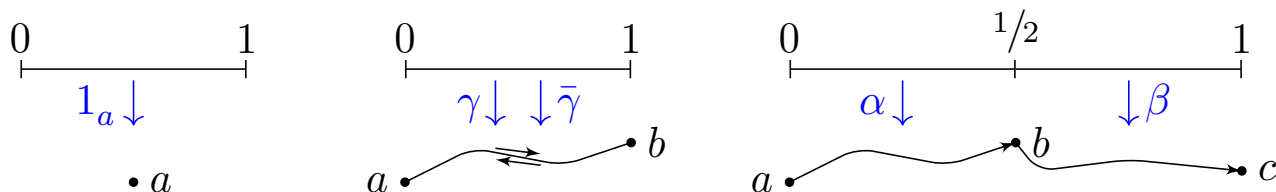
Die Algebraische Topologie konstruiert und nutzt geeignete Funktoren, um von topologischen Räumen ein algebraisches Abbild zu erstellen, das ausreichend akkurat ist, zumindest für große und interessante Klassen von Fragestellungen. Konstruktion und Anwendung solcher Funktoren sind meist subtil und raffiniert, aber auch von ganz eigener Schönheit.

Die Schwierigkeit ist oft nicht die allgemeine *Definition* der Invariante / unseres Funktors, sondern die *Berechnung* in konkreten Anwendungen. Uns gelingt erfreulich rasch folgende kleine, aber feine Auswahl:

topologischer Raum	Fundamentalgruppe (bis auf Isomorphie)	Ref
$X \simeq *$ zsziehbar	$\{1\}$	L2N
$\mathbb{S}^n, n \geq 2$	$\{1\}$	L2U
$\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{C}^*$	$(\mathbb{Z}, +)$	L4C
$\mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \dots, a_g\}$	$\langle s_1, \dots, s_g \mid - \rangle$	L4D
$\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \dots, a_g\}, n \geq 3$	$\{1\}$	L4E

topologischer Raum	Fundamentalgruppe (bis auf Isomorphie)	Ref
zshgd. Graph K	$\langle s_1, \dots, s_g \mid - \rangle$, endlich: $\chi(K) = 1 - g$	L6D
$\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1 / \{\pm 1\} \cong \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z}, +)$	L2E
$\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{S}^2 / \{\pm 1\}$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6L
$\mathbb{RP}^n, n \geq 2$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6T
$\mathrm{GL}_2^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z}, +)$	L6U
$\mathrm{GL}_3^+ \mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$	$(\mathbb{Z}/2, +)$	L6U
$\mathrm{GL}_2 \mathbb{C} \simeq \mathrm{GU}_2 \mathbb{C}$	$(\mathbb{Z}, +)$	L8I
Torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$	L2O
Kleinsche Flasche	$\langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$	L6M
Fläche F_g^+	$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$	L6M
Fläche F_g^-	$\langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0 c_0 c_1 c_1 \cdots c_g c_g \rangle$	L6M
Fläche $F_{g,r}^+, r \geq 1$	$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle$	L6H
Fläche $F_{g,r}^-, r \geq 1$	$\langle c_0, c_1, \dots, c_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle$	L6H

Operationen auf Wegen



Definition L1A: Operationen auf Wegen

Die Menge aller Wege von a nach b im Raum X bezeichnen wir mit:

$$P(X, a, b) := \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ stetig} \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b \}$$

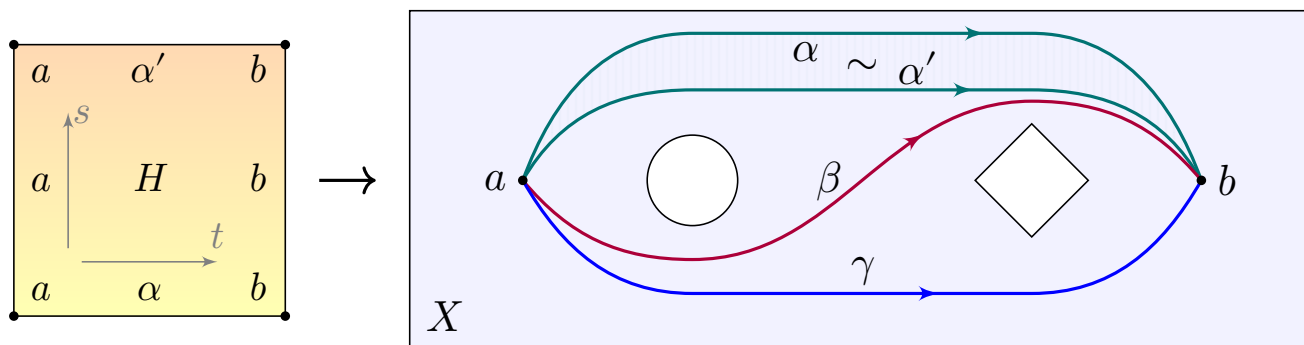
- (1) Der **konstante Weg** $1_a \in P(X, a, a)$ ist $1_a : t \mapsto a$.
- (2) Die **Wegumkehr** $^- : P(X, a, b) \rightarrow P(X, b, a)$ ist $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$.
- (3) Die **Aneinanderhängung** $* : P(X, a, b) \times P(X, b, c) \rightarrow P(X, a, c)$ ist

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung $\alpha * \beta$ ist wohldefiniert dank $\alpha(1) = \beta(0) = b$ und stetig dank Verklebesatz E1P, denn $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$ sind abgeschlossen.

Äquivalenz von Wegen

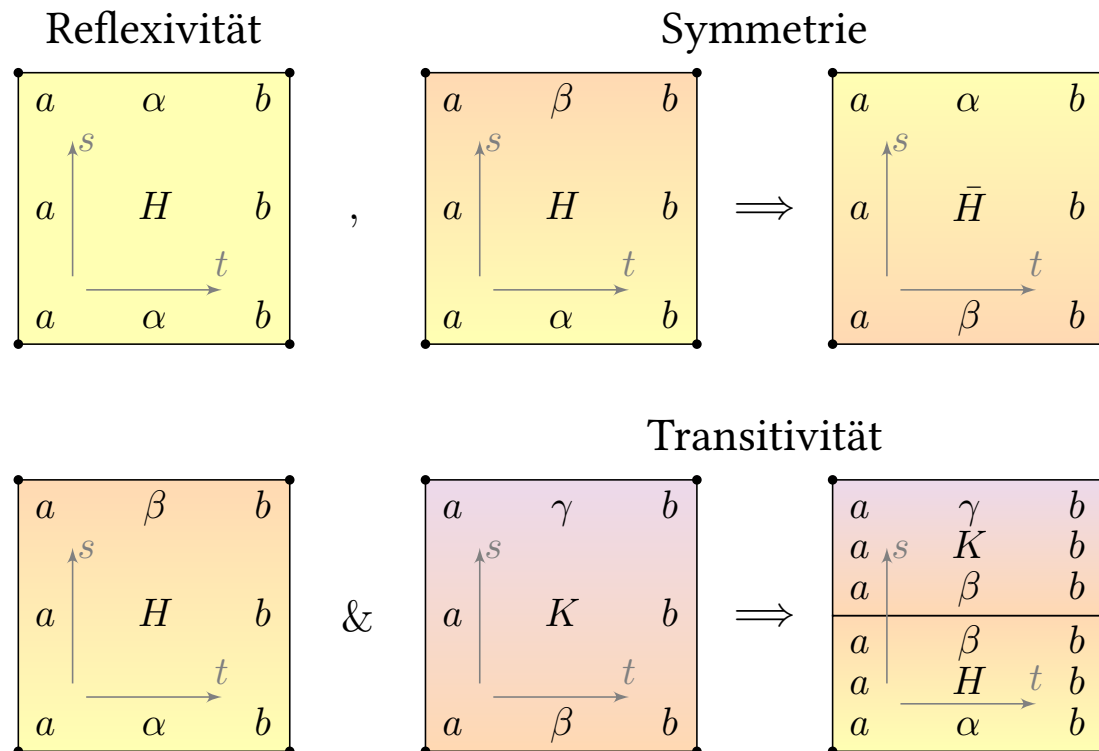
Damit definieren wir Wegkomponenten $\pi_0(X)$ wie in Kapitel G. Nun schauen wir uns die möglichen Wege von a nach b in X genauer an:



Definition L1B: Äquivalenz von Wegen

Zwei Wege $\alpha, \alpha' \in P(X, a, b)$ heißen **äquivalent**, oder ausführlich: **homotop bei festen Endpunkten**, geschrieben $H : \alpha \sim \alpha'$, falls eine Homotopie $H : \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \{0, 1\}$ existiert, also eine stetige Abbildung $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ mit $H(0, t) = \alpha(t)$ und $H(1, t) = \alpha'(t)$ sowie $H(s, 0) = a$ und $H(s, 1) = b$ für alle $s, t \in [0, 1]$. Graphisch stellen wir die Homotopie H wie oben durch das Quadrat $[0, 1]^2$ mit beschrifteten Kanten dar.

Die Relation $\sim$ auf $P(X, a, b)$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.
Wie bei Wegen nutzen wir folgende drei Operationen für Homotopien:



Operationen auf Homotopien

L104
Erläuterung

Aufgabe: Übersetzen Sie diese Skizzen in explizite Formeln.
Begründen Sie so die (immer implizit) behauptete Stetigkeit.

Lösung: (1) Reflexivität: Für jeden Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ gilt $H : \alpha \sim \alpha$ für die in s konstante Homotopie $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X : H(s, t) \mapsto \alpha(t)$. Diese Abbildung ist offensichtlich stetig, dank UAE des Produkts.

(2) Symmetrie: Aus jeder Homotopie $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar{H} : \beta \sim \alpha$ für die in s umgekehrte Homotopie $\bar{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X : (s, t) \mapsto H(1 - s, t)$. Diese Abbildung ist stetig, da Komposition stetiger Abbildungen.

(3) Transitivität: Aus Homotopien $H : \alpha \sim \beta$ und $K : \beta \sim \gamma$ folgt wie skizziert $H * K : \alpha \sim \gamma$ durch die in s verknüpfte Homotopie

$$H * K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H(2s, t) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ K(2s - 1, t) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Die Stetigkeit von $H * K$ folgt aus dem Verklebesatz (E1p).

Proposition L1c: Verknüpfung von Wegekassen

(0) Äquivalenz von Wegen ist eine Äquivalenzrelation auf $P(X, a, b)$. Die Quotientenmenge bezeichnen wir mit $\Pi(X, a, b) := P(X, a, b)/\sim$.

(1) Aus $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar{H} : \bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$ mit $\bar{H}(s, t) = H(s, 1 - t)$. Wir erhalten somit durch Wegumkehr eine wohldefinierte Umkehr von Wegekassen,

$$- : \Pi(X, a, b) \rightarrow \Pi(X, b, a) \quad \text{mit} \quad [\bar{\alpha}] := [\alpha].$$

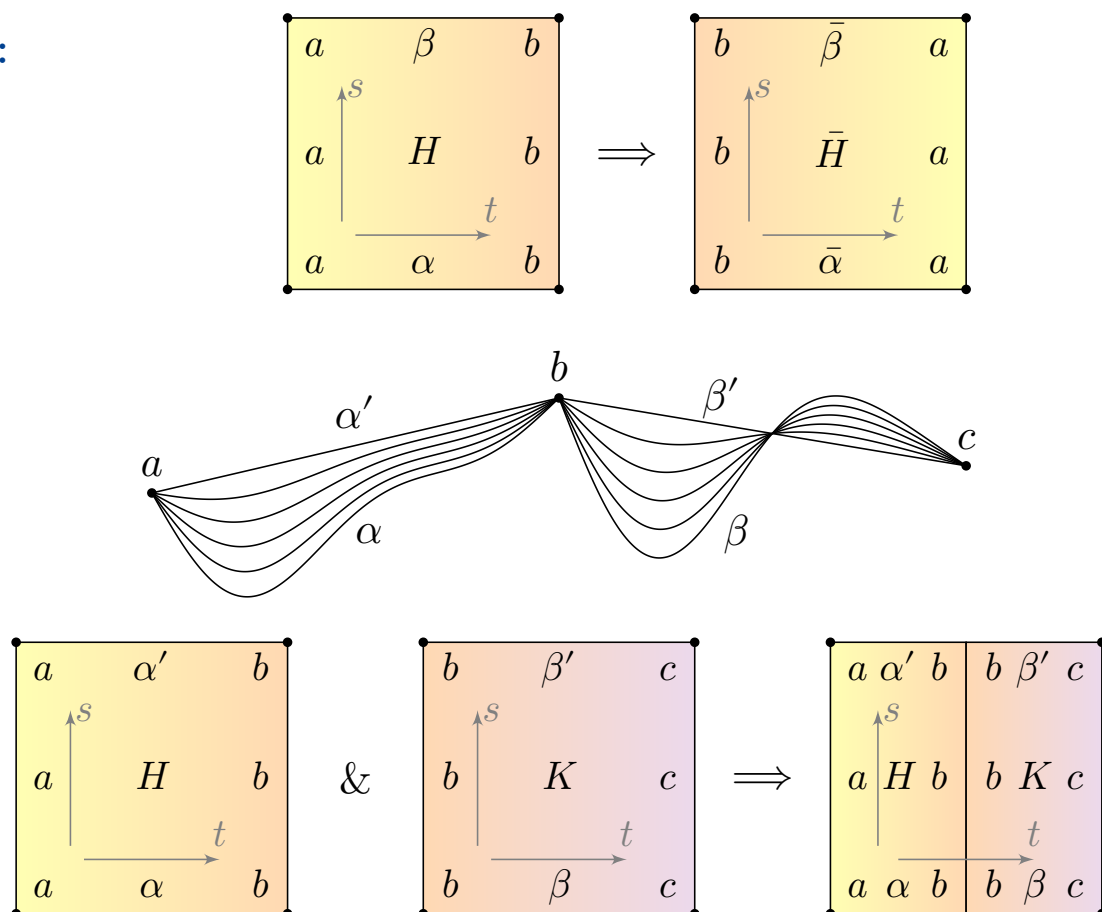
(2) Aus $H : \alpha \sim \alpha'$ in $P(X, a, b)$ und $K : \beta \sim \beta'$ in $P(X, b, c)$ folgt $H *_2 K : \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ in $P(X, a, c)$. Wir erhalten somit

$$\cdot : \Pi(X, a, b) \times \Pi(X, b, c) \rightarrow \Pi(X, a, c) \quad \text{mit} \quad [\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta].$$

In Worten: Wir verknüpfen verknüpfbare Wegekassen $[\alpha] \in \Pi(X, a, b)$ und $[\beta] \in \Pi(X, b, c)$ durch die Aneinanderhängung ihrer Repräsentanten gemäß $[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta] \in \Pi(X, a, c)$. Dank (2) ist dies wohldefiniert.

Verknüpfung von Wegekassen

Skizze:



Aufgabe: Übersetzen Sie diese Skizzen in explizite Formeln. Begründen Sie so die (immer implizit) behauptete Stetigkeit.

Lösung: (0) Reflexivität, Symmetrie und Transitivität haben wir bereits oben geklärt. Die Äquivalenz $\sim$ trägt also ihren Namen zurecht!

(1) Inversion: Aus jeder Homotopie $H : \alpha \sim \beta$ folgt $\bar{H} : \bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$ für die in t umgekehrte Homotopie $\bar{H} =: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X : (s, t) \mapsto H(s, 1 - t)$.

(2) Verknüpfung: Aus Homotopien $H : \alpha \sim \alpha'$ und $K : \beta \sim \beta'$ folgt wie skizziert $H *_2 K : \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$ durch die in t verknüpfte Homotopie

$$H *_2 K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X : (s, t) \mapsto \begin{cases} H(s, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(s, 2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

😊 Verknüpfung der Homotopien gibt eine Homotopie der Verknüpfung. Die Stetigkeit von $H * K$ folgt aus dem Verklebesatz (E1p). Die Inversion und die Verknüpfung sind demnach wohldefiniert auf Wegekassen.

Sind diese Rechnungen langweilig? Ja! Sind sie dennoch nötig? Auch ja! Manchen fällt die(se) Mathematik unnötig schwer, weil sie leichtsinnig springen von „Das ist banal!“ zu „Das ist unverständlich!“. Machen Sie es richtig, lernen Sie mit Stift und Papier und rechnen Sie alles nach!

Zunächst einmal sind diese Feststellungen alle sehr naheliegend und präzisieren offensichtliche Beobachtungen zu Wegen und Homotopien. Darauf wären Sie auch alleine gekommen, vermutlich wäre Ihnen all das nur viel zu einfach vorgekommen, um es sorgfältig aufzuschreiben.

Warum mache ich mir dann diese pedantische Mühe? Ganz einfach: Diese Rechenregeln mögen zwar zunächst unscheinbar daherkommen, doch wir werden uns im Folgenden immer wieder darauf berufen. Daher fangen wir ganz unten an und legen ein solides Fundament.

Soweit die logische Sicht. Aus didaktischer Sicht erkläre ich alle Konstruktionen kleinschrittig genug, dass Sie gut folgen können, aber möglichst nicht zu kleinlich, um Langeweile zu vermeiden. Das Beste ist wie immer die Arbeitsteilung. Klären Sie die Details!

Satz L1D: Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Jeder topologische Raum X definiert eine Kategorie $\Pi(X)$:

- (a) Objekte sind die Punkte $a, b, c, d, \dots \in X$ des Raumes X .
- (b) Morphismen $[\alpha] : a \rightarrow b$ sind die Wegekassen von a nach b in X .
- (c) Die Verknüpfung ist die Aneinanderhängung von Wegekassen.

Diese Verknüpfung erfreut sich folgender Eigenschaften:

- (1) Identität: Für $\alpha : a \rightarrow b$ gilt $1_a * \alpha \sim \alpha \sim \alpha * 1_b$, also

$$[1_a] \cdot [\alpha] = [\alpha] = [\alpha] \cdot [1_b].$$

- (2) Inversion: Für $\alpha : a \rightarrow b$ gilt $\alpha * \bar{\alpha} \sim 1_a$ und $\bar{\alpha} * \alpha \sim 1_b$, also

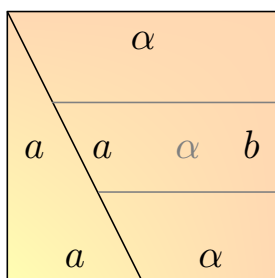
$$[\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] = [1_a] \quad \text{und} \quad [\bar{\alpha}] \cdot [\alpha] = [1_b].$$

- (3) Assoziativität: Für $a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} d$ gilt $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$, also

$$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]).$$

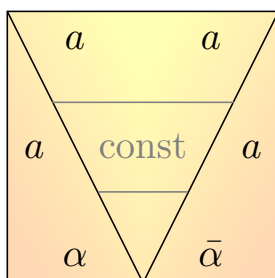
Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Beweis: Wir konstruieren passende Homotopien $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$:



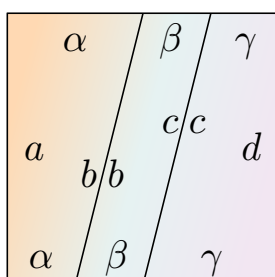
- (1) Identität $H : 1_a * \alpha \sim \alpha$,

$$H(s, t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(\frac{2t-1+s}{1+s}) & \text{für } \frac{1-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



- (2) Inversion $H : \alpha * \bar{\alpha} \sim 1_a$,

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(1-s) & \text{für } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2}, \\ \alpha(2-2t) & \text{für } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



- (3) Assoziativität $H : (\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$,

$$H(s, t) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4}, \\ \beta(4t-1-s) & \text{für } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}, \\ \gamma(\frac{4t-2-s}{2-s}) & \text{für } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definition L1E: Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Wir nennen $\Pi(X)$ das **Fundamentalgruppoid** des Raumes X .

Allgemein ist ein **Gruppoid** G eine Kategorie, in der jeder Morphismus invertierbar ist. Ein **Gruppoidhomomorphismus** ist ein Funktor zwischen Gruppoiden. Diese bilden die Kategorie $\mathbf{Grpoid}$.

Bemerkung: Hat das Gruppoid G nur ein Objekt, $\text{Ob}_G = \{x\}$, so besteht G nur aus der einen Gruppe $G = \text{Aut}(x) = \text{Mor}_G(x, x)$. Umgekehrt können wir jedes Gruppoid G als verallgemeinerte Gruppe betrachten: Zwar sind nicht alle Paare von Morphismen verknüpfbar, doch für verknüpfbare gilt stets Assoziativität, und es gibt neutrale und inverse Elemente.

Beispiel: In der vertrauten Kategorie FinVec_K der endlich-dimensionalen Vektorräume über einem Körper K betrachten wir die Unterkategorie $\text{FinVec}_K^\times$ aller Isomorphismen. Dies ist ein Gruppoid. Genau dann sind zwei Vektorräume verbindbar, liegen also in derselben „Komponente“, wenn Sie gleiche Dimension haben. Kanonische Repräsentanten sind K^n .

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$

Wir werden später zu Fundamentalgruppen übergehen, doch vorerst ist das Fundamentalgruppoid das natürlichere und näherliegende Konzept. Für die ohnehin notwendigen, langweilig-grundlegenden Nachweise kostet es kaum Mehraufwand, dafür bietet es nützliche Flexibilität.

Das Fundamentalgruppoid ist ein zutiefst demokratisches Konzept: Alle Punkte $a \in X$ sind gleichberechtigt! Es gibt kein Zentrum und keinen ausgezeichneten Punkt, der schöner wäre als andere.

Genau so demokratisch ist allgemein auch unser Raum X .

Für die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ müssen / wollen / werden wir die perfekte Symmetrie brechen und einen Punkt $x_0 \in X$ auszeichnen. Das ist meist ein Akt der Willkür, kann aber Rechnungen vereinfachen. Vorerst folgen wir dem Credo der anarchistischen Bewegung:

Ni Dieu ni Maître de conférences
[Kein Gott, kein Herr Assistenzprofessor]

Satz L11: stetige Abbildung

(1) Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert einen Homomorphismus der zugehörigen Fundamentalgruppoiden, nämlich den Funktor

$$f_{\#} = \Pi(f) : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y), \quad X \ni a \mapsto f(a) \in Y, \\ ([\alpha] : a \rightarrow b) \mapsto ([f \circ \alpha] : f(a) \rightarrow f(b)).$$

In Worten: Wir ordnen jedem Punkt $a \in X$ seinen Bildpunkt $f(a) \in Y$ zu und jeder Wegeklasse $[\alpha] : a \rightarrow b$ in X ihr Bild $[f \circ \alpha] : f(a) \rightarrow f(b)$ in Y .

(2) Zusammengefasst: Wir erhalten den Funktor $\Pi : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grpoid}$. Er ordnet jedem Raum X sein Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ zu und jeder stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ den Funktor $\Pi(f) : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$.

Aufgabe: Dies folgt direkt aus den Definitionen, ist demnach trivial. Falls Sie üben wollen oder zweifeln: Was ist zu zeigen? Zeigen Sie es! Auch triviale Rechnungen wollen durchgeführt und geprüft werden. Dann dürfen Sie selbstbewusst ausrufen: „Ja, es ist wirklich trivial!“

Wege/klassen unter stetigen Abbildungen

Beweis: (1) Wir rechnen nach, dass $f_{\#}$ tatsächlich ein Funktor ist.

Für den konstanten Weg 1_a in $a \in X$ gilt $f_{\#}([1_a]) = [f \circ 1_a] = [1_{f(a)}]$.

Für die Verknüpfung sehen wir ebenso durch Einsetzen der Definitionen:

$$f_{\#}([\alpha] \cdot [\beta]) \stackrel{\text{Def}}{=} f_{\#}([\alpha * \beta]) \stackrel{\text{Def}}{=} [f \circ (\alpha * \beta)] \\ \stackrel{\text{Def}}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \stackrel{\text{Def}}{=} [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] \stackrel{\text{Def}}{=} f_{\#}([\alpha]) \cdot f_{\#}([\beta]).$$

Somit ist $f_{\#} : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ ein Funktor, wie behauptet. Daraus folgt die Inversion, allgemein für jeden Gruppoidhomomorphismus, hier konkret

$$[f \circ \bar{\alpha}] = \overline{[f \circ \alpha]} = \overline{[f \circ \alpha]}.$$

(2) Wir rechnen nach, dass $\Pi : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grpoid}$ ein Funktor ist.

Für $\text{id}_X : X \rightarrow X$ gilt $\Pi(\text{id}_X) = \text{id}_{\Pi(X)}$, denn es gilt $a \mapsto \text{id}_X(a) = a$ für alle Punkte $a \in X$ und $[\alpha] \mapsto [\text{id}_X \circ \alpha] = [\alpha]$ für alle Wege α in X .

Für $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ in $\mathbf{Top}$ gilt $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$ in $\mathbf{Grpoid}$, denn $a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))$ und $[\alpha] \mapsto [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)]$. QED

Sei $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ eine Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Zu $a \in X$ erhalten wir $\gamma_a : [0, 1] \rightarrow Y : t \mapsto H(t, a)$. Für $\alpha \in P(X, a, b)$ folgt:

$$\begin{array}{ccc}
 g(a) & \xrightarrow{g \circ \alpha} & g(b) \\
 \uparrow \gamma_a & & \uparrow \gamma_b \\
 f(a) & \xrightarrow{f \circ \alpha} & f(b)
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 g \circ \alpha & & \\
 \hline
 \gamma_a & H \circ \alpha & \gamma_b \\
 \hline
 f \circ \alpha & & \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \gamma_a & g \circ \alpha & \\
 \hline
 f(a) & H \circ \alpha & g(b) \\
 \hline
 f \circ \alpha & & \gamma_b \\
 \hline
 \end{array}$$

Umwandlung von H zu K mit festen Endpunkten,

$$K(s, t) = \begin{cases} H(2t, a) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ H(s, \alpha(2t - s)) & \text{für } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2}, \\ H(2t - 1, b) & \text{für } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Lemma L1j: Homotopie

Sei $H : f \simeq g$ eine Homotopie. Für jeden Weg $\alpha \in P(X, a, b)$ folgt $K : (f \circ \alpha) * \gamma_b \sim \gamma_a * (g \circ \alpha)$ mit $\gamma_a(t) = H(t, a)$ und $\gamma_b(t) = H(t, b)$.

Satz L1k: natürlicher Isomorphismus

Jede Homotopie $(H, \bar{H}) : f \simeq g : X \rightarrow Y$ stetiger Abbildungen induziert einen natürlichen Isomorphismus $(H_{\#}, \bar{H}_{\#}) : f_{\#} \cong g_{\#} : \Pi(X) \rightarrow \Pi(Y)$ der zugehörigen Funktoren / Fundamentalgruppoidhomomorphismen.

Als hilfreiches Sinnbild:

$$\begin{array}{ccc}
 & f_{\#} & \\
 \curvearrowright & & \curvearrowleft \\
 \Pi(X) & \begin{array}{c} \downarrow H_{\#} \\ \uparrow \bar{H}_{\#} \end{array} \cong & \Pi(Y) \\
 \curvearrowleft & & \curvearrowright \\
 & g_{\#} &
 \end{array}$$

Beweis: Was ist hier zu zeigen? Zeigen Sie es! Diese Fingerübung erfordert das sorgsame Lesen und Umsetzen obiger Definitionen.

Die Konstruktion des Fundamentalgruppoids $\Pi(X)$ ist zwar abstrakt, aber leicht: Wir haben in diesem Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften formuliert und bewiesen. Der Nachweis verlangt jeweils die Konstruktion einer passenden Homotopie, und hierzu mussten wir nicht lange suchen. Das ist eine leichte Übung in begrifflicher Sorgfalt; sie ist notwendig, um technische Sicherheit zu gewinnen und alle Details zu klären.

Viel schlauer sind wir dadurch noch nicht: Unser eigentliches Ziel ist es, topologische Räume X, Y und stetige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ besser zu verstehen. Als Werkzeug haben wir nun die Kategorie $\Pi(X)$, doch diese ist vorerst nur *abstract general nonsense*. Als algebraische Struktur ist sie zwar vielseitig einsetzbar, zum Beispiel für Wegintegrale (§L5), doch für direkte Anwendung und Berechnung leider noch etwas unübersichtlich.

Wir brauchen Werkzeuge, möglichst wirksam und effizient!

Wir wollen hierzu eine weitere Vereinfachung vornehmen und von $\Pi(X)$ zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ übergehen. Diese können wir dann in konkreten Beispielen explizit berechnen, sodass wir topologische Räume unterscheiden und stetige Abbildungen vergleichen können.

Studienanfänger:innen klagen: „Die abstrakten Definitionen sind schwer, zum Glück sind konkrete Beispiele und explizite Rechnungen leicht.“ In der Algebraischen Topologie, wie in vielen realen Anwendungen, ist es genau umgekehrt: Fragen ist leicht, Antworten ist schwer.

Für die Algebraische Topologie besteht die Schwierigkeit nicht in der abstrakten Definition von $\Pi(X)$ bzw. $\pi_1(X, x_0)$, also nicht in der Frage „Wie verhalten sich Wege in X ?“, sondern in der informativen Antwort, expliziten Berechnung, möglichst konkret und einfach zu handhaben.

In diesem Kapitel wollen wir beide Aspekte zum guten Ende führen: elegant-allgemeine Methoden und effizient-konkrete Anwendungen! Das kostet etwas Geduld, schwer ist es glücklicherweise nicht.

Vielleicht denken Sie beim ersten Kontakt: Das Fundamentalgruppoid ist zwar mathematisch elegant, hat aber wohl kaum Anwendungen, oder? Weit gefehlt! Im Gegenteil, Sie nutzen es nahezu überall. Als berühmtes Beispiel kennen Sie das folgende Potentialproblem von Vektorfeldern.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dies können wir integrieren über jeden stückweise $\mathcal{C}^1$ -glatten Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$.

$$I_f: (P'(U), *) \rightarrow (\mathbb{R}, +) : \gamma \mapsto \int_{\gamma} f \cdot d\gamma := \int_{t=a}^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Hierbei ist $P'(U)$ die Menge aller stückweise $\mathcal{C}^1$ -glatten Wege. Das Integral $\int_{\gamma} f \cdot d\gamma$ ist invariant bei Upparametrisierung von γ . Zudem verträgt es sich mit den üblichen Operationen auf Wegen:

- 1 Für jeden konstanten Weg $\gamma = 1_a$ gilt $\int_{\gamma} f \cdot d\gamma = 0$.
- 2 Für den zu γ inversen Weg $\bar{\gamma}$ gilt $\int_{\bar{\gamma}} f \cdot d\gamma = -\int_{\gamma} f \cdot d\gamma$.
- 3 Für die Aneinanderhängung gilt $\int_{\alpha * \beta} f \cdot d\gamma = \int_{\alpha} f \cdot d\alpha + \int_{\beta} f \cdot d\beta$.

Wir erhoffen uns einen Funktor $\Pi(U) \rightarrow \mathbb{R}$, doch im Allgemeinen ändert sich das Wegintegral $\int_{\gamma} f \cdot d\gamma$ bei Homotopie von γ . Invarianz gilt, wenn f *rotationsfrei* ist, wie wir in L5L zeigen und im Hauptsatz L5M nutzen.

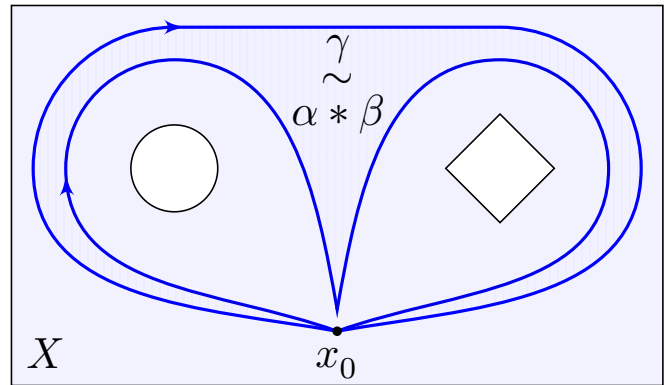
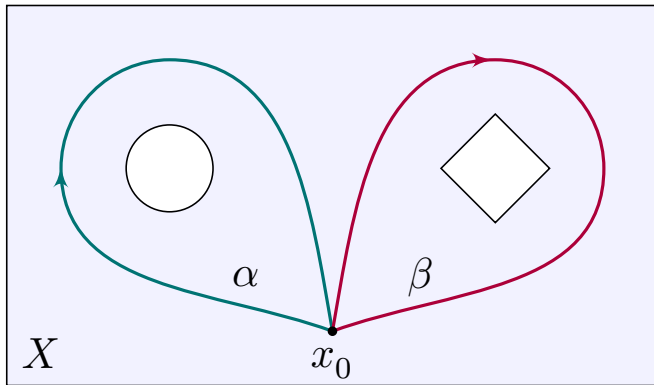
Hauptsatz, Integrationsteil: Genau dann besitzt das $\mathcal{C}^0$ -Vektorfeld $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Gebiet $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$ -Potential $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$, wenn das Wegintegral $\int_{\gamma} f \cdot d\gamma$ verschwindet entlang jedes geschlossenen Weges γ in U . In diesem Falle erhalten wir das ersehnte Potential F durch das (nun wegunabhängige!) Wegintegral

$$F(x) = F(x_0) + \int_{s=x_0}^x f(s) \cdot ds.$$

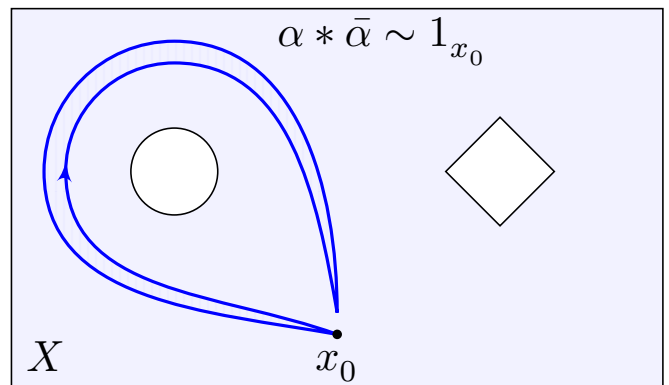
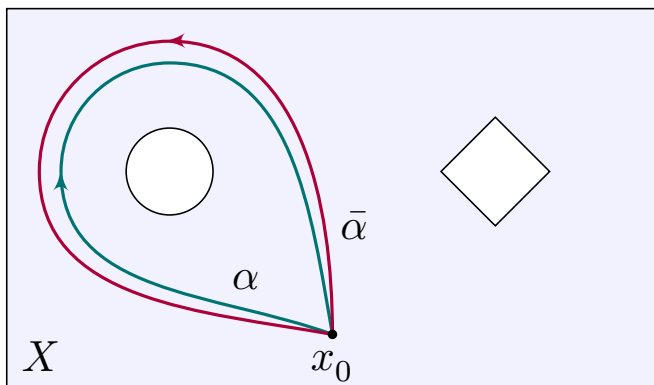
Der Differentialteil geht noch weiter. Hierzu sei f zudem $\mathcal{C}^1$ -glatt. Notwendig für ein Potential ist dann die lokale Bedingung, dass die Rotation $\partial_j f_i - \partial_i f_j$ verschwindet für alle i, j . Dies sorgt bereits dafür, dass das Wegintegral von f homotopie-invariant wird. Hinreichend ist weiterhin die obige globale Bedingung. Es genügt nun, diese auf einem Erzeugendensystem von $\pi_1(X, x_0)_{ab}$ zu prüfen, was meist leicht ist.







Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist leicht erklärt und visualisiert:
Schleifen in (X, x_0) modulo Homotopie bei festem Start und Ziel in x_0 .



Erinnerung: Zum Raum X haben wir das **Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(X) := P(X)/\sim = \frac{\{\text{Wege } \alpha : [0, 1] \rightarrow X\}}{\text{Homotopie in } X \text{ relativ } \{0, 1\}}.$$

Start $a \in X$ und Ziel $b \in X$ sind dabei beliebige Punkte im Raum X .
Dies vereinfachen wir, indem wir $x_0 \in X$ als Start und Ziel festlegen!

Definition L2A: Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$

Zum Raum X mit Fußpunkt $x_0 \in X$ haben wir die **Fundamentalgruppe**

$$\pi_1(X, x_0) := \Pi(X, x_0, x_0) = \frac{\{\text{Schleifen } \alpha : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x_0)\}}{\text{Homotopie in } X \text{ relativ } \{0, 1\}}$$

weiter mit der Verknüpfung $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ durch Aneinanderhängen.
Damit ist $(\pi_1(X, x_0), \cdot, [1_{x_0}])$ tatsächlich eine Gruppe, siehe L1D.

Grundlegende Beispiele: Es gilt $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{1\}$ da sternförmig (G4B).
Wir haben $(\deg, \varphi) : (\pi_1(\mathbb{C}^*, 1), \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +) : [t \mapsto e^{2\pi i k t}] \mapsto k$ dank J1I.

Ausführlich in Worten: Eine **Schleife** in (X, x_0) ist ein geschlossener Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Zwei Schleifen α, α' in (X, x_0) sind **äquivalent**, wenn es eine Homotopie $H : \alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \{0, 1\}$ gibt, also eine stetige Deformation von α nach α' bei festgehaltenen Endpunkten (L1B).

Das Paar $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ ist eine Gruppe (L1D): Die Äquivalenzklasse $[1_{x_0}]$ des konstanten Weges ist neutral in $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$. Zu jeder Schleife α in (X, x_0) ist der umgekehrte Weg $\bar{\alpha}$ ebenfalls eine Schleife in (X, x_0) , und die Äquivalenzklassen $[\alpha]$ und $[\bar{\alpha}]$ sind zueinander invers in $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$. Schließlich ist die Verknüpfung von Wegeklassen assoziativ.

 Für die drei Gruppeneigenschaften ist der Übergang zu Wegeklassen wesentlich: Im Schleifenraum $\Omega(X, x_0) := P(X, x_0, x_0)$ gelten Neutrales, Inversion und Assoziativität nicht! Diese drei erreichen wir erst modulo Homotopie bei festgehaltenen Endpunkten.

 Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist leicht zu definieren und zu visualisieren. Anfangs muss man sich an den Begriff der Homotopie gewöhnen, doch glücklicherweise haben Sie damit schon Übung.

Ich habe zunächst den allgemeineren Begriff des Fundamentalgruppoids $\Pi(X)$ vorangestellt, nicht allein um zu verallgemeinern, sondern um zu vereinfachen, da die nötigen Nachweise wörtlich dieselben sind:

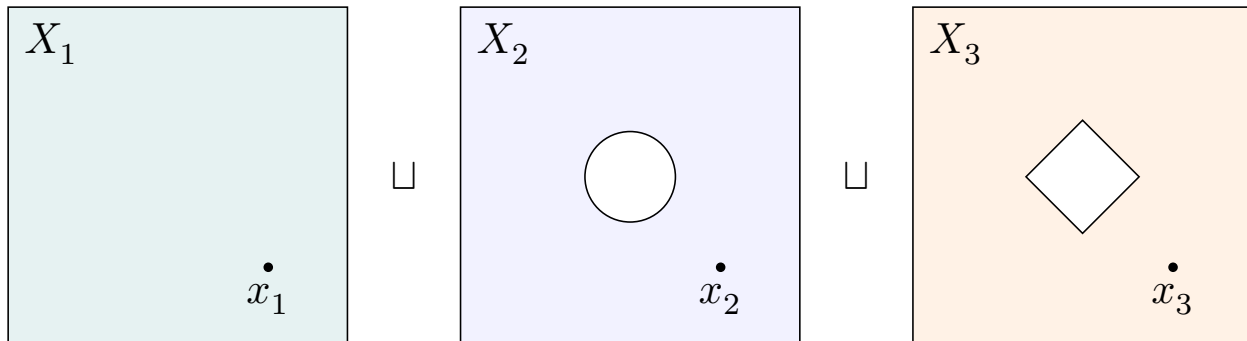
Alle Argumente aus Abschnitt §L1 nutzen wir nun dankend für die Fundamentalgruppe. Sie werden auch nicht leichter, wenn wir (unnötig früh) Start und Ziel auf einen willkürlichen Punkt $x_0 \in X$ festlegen. Im Gegenteil ist der allgemeine Fall eleganter, klarer und flexibler.

Im Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ erweist sich die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0) = \Pi(X, x_0, x_0)$ nun als natürlich-willkommener Spezialfall. Vorteil: Gruppen sind übersichtlicher und einfacher zu verstehen. Nachteil: Wir müssen einen Fußpunkt willkürlich wählen.

Bemerkung: Diese willkürliche Lokalisierung begegnet uns recht oft: In jeder Kategorie $(\mathcal{C}, \circ)$ bilden die Endomorphismen $\text{End}(a) = \mathcal{C}(a, a)$ ein Monoid und darin die Automorphismen $\text{Aut}(a) = \text{End}(a)^\times$ eine Gruppe. In der Linearen Algebra betrachtet man so die Endo/Automorphismen eines linearen Raumes V und lässt dabei die anderen Räume außer Acht.

Der Fußpunkt ist wesentlich!

Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ zu verschiedenen Fußpunkten $x_0 \neq x_1$ in X sind niemals *gleich*, sie sind sogar disjunkt, da sie nach Definition verschiedene Elemente enthalten! Es kann durchaus vorkommen, dass sie nicht einmal *isomorph* sind:

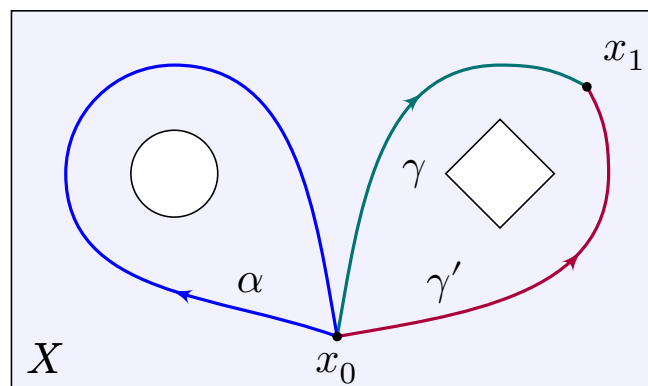


Beispiel: Für $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ gilt $\pi_1(X, x_1) \not\cong \pi_1(X, x_2) \cong \pi_1(X, x_3)$.

Wir wissen $\pi_1(X, x_1) = \{1\}$, da sternförmig (G4B), sowie $\pi_1(X, x_2) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(X, x_3) \cong \mathbb{Z}$, dank Umlaufzahl J1I. Die letzten beiden Gruppen sind *zufällig* isomorph, doch leider gibt es keinen *natürlichen* Isomorphismus, sondern nur *willkürliche* Isomorphismen $(h, k) : \pi_1(X, x_2) \cong \pi_1(X, x_3)$.

Verschieben des Fußpunktes

Fußpunkte in derselben Wegkomponente liefern isomorphe Gruppen!



Satz L2B: Verschieben des Fußpunktes

Jeder Weg $\gamma \in P(X, x_0, x_1)$ induziert einen Gruppenisomorphismus

$$(h_\gamma, h_{\bar{\gamma}}) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1), \quad [\alpha] \mapsto [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma], \quad [\gamma * \beta * \bar{\gamma}] \mapsto [\beta].$$

Wir erhalten den Funktor $\Pi(X) \rightarrow \mathbf{Grp}$ mit $x_0 \mapsto \pi_1(X, x_0)$ und $[\gamma] \mapsto h_\gamma$.

Ist $\gamma' \in P(X, x_0, x_1)$ ein weiterer Weg, so unterscheiden sich h_γ und $h_{\gamma'} = c^{-1} \cdot h_\gamma \cdot c$ durch die Konjugation mit $c = [\bar{\gamma} * \gamma'] \in \pi_1(X, x_1)$.

😊 Alles liegt explizit vor uns, es genügt sorgsames Nachrechnen!

Beweis: (1) Wir zeigen, dass h_γ ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} h_\gamma([\alpha]) \cdot h_\gamma([\alpha']) &\stackrel{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \cdot [\bar{\gamma} * \alpha' * \gamma] \stackrel{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \alpha' * \gamma] \\ &\stackrel{\text{Inv}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \alpha' * \gamma] \stackrel{\text{Def}}{=} h_\gamma([\alpha * \alpha']) \stackrel{\text{Def}}{=} h_\gamma([\alpha] \cdot [\alpha']) \end{aligned}$$

(2) Dies definiert einen Funktor: Aus $H : \gamma \sim \gamma'$ in $P(X, x_0, x_1)$ folgt

$$h_\gamma([\alpha]) \stackrel{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] \stackrel{H}{=} [\bar{\gamma}' * \alpha * \gamma'] \stackrel{\text{Def}}{=} h_{\gamma'}([\alpha])$$

Für den konstanten Weg $\gamma = 1_{x_0}$ gilt $h_\gamma = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$, denn

$$h_\gamma([\alpha]) \stackrel{\text{Def}}{=} [\bar{1}_{x_0} * \alpha * 1_{x_0}] \stackrel{\text{Ass}}{=} [\alpha].$$

Für die Komposition von $\gamma : x_0 \rightarrow x_1$ und $\gamma' : x_1 \rightarrow x_2$ folgt

$$(h_{\gamma'} \circ h_\gamma)([\alpha]) \stackrel{\text{Def}}{=} h_{\gamma'}(h_\gamma([\alpha])) \stackrel{\text{Def}}{=} [\bar{\gamma}' * \bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \gamma'] \stackrel{\text{Def}}{=} h_{\gamma * \gamma'}([\alpha]).$$

(3) Insbesondere gilt $h_{\bar{\gamma}} \circ h_\gamma = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ und $h_\gamma \circ h_{\bar{\gamma}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$, das heißt, h_γ und $h_{\bar{\gamma}}$ sind zueinander invers. Ebenso folgt die Konjugation. QED

Der Fußpunkt ist und bleibt wesentlich!

Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ kommutativ, dann stimmen alle so definierten Isomorphismen h_γ überein, und wir können $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ natürlich identifizieren. Ist zudem X wegzusammenhängend, so dürfen wir kurz $\pi_1(X)$ schreiben. Das ist eine seltene Ausnahme!

Im Allgemeinen ist die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ nicht kommutativ, daher gibt es keinen *natürlichen* Isomorphismus zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ für verschiedene Fußpunkte $x_0 \neq x_1$ in X . Wir können diese Gruppen daher nicht einfach als gleich betrachten. Der Fußpunkt bleibt wesentlich!

Zwischen den Fundamentalgruppen verschiedener Wegkomponenten besteht überhaupt kein Zusammenhang! Ausgehend vom Fußpunkt verbleiben Wege in dieser Komponente. Die topologische Summe $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ erfüllt $\pi_1(X, x_i) = G_i$ je nach Wahl des Fußpunktes x_i .

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ ist die natürliche gemeinsame Beschreibung: Es enthält alle Informationen über Wegkomponenten $\pi_0(X)$ und Fundamentalgruppen $\pi(X, x_0)$ sowie deren durch Wege induzierten Isomorphismen $(h_\gamma, h_{\bar{\gamma}}) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.

Funktorialität: allgemeine Rechenregel

Ein **punktierter Raum** (X, x_0) ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt $x_0 \in X$. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$ schreiben wir kurz $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Mit der üblichen Komposition erhalten wir die Kategorie Top_* der punktierten Räume.

Satz L2D: π_1 ist ein Funktor.

Jedem punktierten Raum (X, x_0) ordnen wir seine Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ zu. Jede stetige Abbildung $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ **punktierter Räume** induziert ihren zugehörigen Gruppenhomomorphismus **der Fundamentalgruppen**

$$f_{\#} = \pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha].$$

Wir erhalten so den **(kovarianten) Funktor** $\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$.

😊 Das fasst wunderbar elegant wichtige Rechenregeln für π_1 zusammen: Die Fundamentalgruppe ist nicht nur auf punktierten Räumen definiert, sie verwandelt zudem stetige Abbildungen in Gruppenhomomorphismen und verträgt sich „natürlich“ mit Identität und Komposition!

Funktorialität: allgemeine Rechenregel

😊 Alles liegt explizit vor uns, es genügt sorgsames Nachrechnen!

Beweis: Jede Homotopie $H: \alpha \sim \alpha'$ induziert $(f \circ H): (f \circ \alpha) \sim (f \circ \alpha')$, also ist $f_{\#}$ wohldefiniert. Zudem ist $f_{\#}$ ein Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned} f_{\#}([\alpha] \cdot [\beta]) &\stackrel{\text{Def}}{=} f_{\#}([\alpha * \beta]) \stackrel{\text{Def}}{=} [f \circ (\alpha * \beta)] \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \stackrel{\text{Def}}{=} [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] \stackrel{\text{Def}}{=} f_{\#}([\alpha]) \cdot f_{\#}([\beta]) \end{aligned}$$

Für die Identität gilt $\pi_1(\text{id}_{(X, x_0)}) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$, denn:

$$\pi_1(\text{id}_{(X, x_0)})([\alpha]) \stackrel{\text{Def}}{=} [\text{id}_{(X, x_0)} \circ \alpha] \stackrel{\text{Def}}{=} [\alpha]$$

Schließlich respektiert π_1 die Komposition:

$$\begin{aligned} \pi_1(g \circ f)([\alpha]) &\stackrel{\text{Def}}{=} [(g \circ f) \circ \alpha] \stackrel{\text{Ass}}{=} [g \circ (f \circ \alpha)] \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \pi_1(g)([f \circ \alpha]) \stackrel{\text{Def}}{=} \pi_1(g)(\pi_1(f)([\alpha])) \stackrel{\text{Def}}{=} (\pi_1(g) \circ \pi_1(f))([\alpha]) \end{aligned}$$

Somit ist $\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ ein (kovarianter) Funktor, wie behauptet. QED

Beispiel: Dank Umlaufzahl $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \cong \mathbb{Z}$ (J11) wissen wir $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) = \{[\alpha^k] \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit dem Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^* : t \mapsto e^{2\pi i t}$.
Zu $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir $p_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$ und finden:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[p_n]{z \mapsto z^n} & (\mathbb{C}^*, 1) \\
 \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[\alpha^k \mapsto \alpha^{kn}]{\pi_1(p_n)} & \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \\
 \downarrow \deg \cong \uparrow \varphi & \alpha(t) = e^{2\pi i t} & \downarrow \deg \cong \uparrow \varphi \\
 (\mathbb{Z}, +) & \xrightarrow[k \mapsto kn]{\cdot n} & (\mathbb{Z}, +)
 \end{array}$$

😊 Hier kann man die Funktorialität direkt als Potenzgesetze ablesen:
Für die Komposition gilt $p_n \circ p_m = p_{mn} : z \mapsto (z^m)^n = z^{mn}$ und somit $\pi_1(p_n \circ p_m) : [\alpha^k] \mapsto [(\alpha^k)^{mn}]$ und $\pi_1(p_n) \circ \pi_1(p_m) : [\alpha^k] \mapsto [((\alpha^k)^m)^n]$.

😊 Wörtlich dasselbe gilt für die stetigen Abbildungen $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ und $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$ und $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n/|z^n|$.

Bislang können wir nur für sehr wenige Räume die Fundamentalgruppe ausrechnen, diese missliche Lage wollen und werden wir bald verbessern. Vorerst betrachten wir jedoch nur die kleinen und einfachen Beispiele, die wir mit unseren bisherigen Werkzeugen sofort behandeln können.

😊 Das obige Diagramm erinnert an die Lineare Algebra, tatsächlich zeigt es die Wahl einer Basis $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) : k \mapsto [\alpha^k]$ und stellt damit unseren Endomorphismus $\pi_1(f)$ durch eine ganzzahlige Matrix $n \in \mathbb{Z}^{1 \times 1}$ dar. In diesen Koordinaten gelingt unsere Rechnung erfreulich übersichtlich!

😊 Die hierzu nötige Vorbereitung besteht aus zwei Teilen. Einerseits benötigen die allgemeinen Rechenregeln: π_1 ist ein Funktor! Andererseits brauchen wir konkrete Daten, hier nutzen wir den wunderbar expliziten Isomorphismus $(\deg, \varphi) : [\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^*] \cong \mathbb{Z}$ dank Umlaufzahl (J11).

😊 Auch wenn dieses Miniaturbeispiel noch allzu einfach ist, so illustriert es doch das Zusammenspiel dieser beiden Zutaten: abstrakt und konkret. So wird es im Folgenden auch für interessantere Beispiele aussehen.

Korollar L2E: Isomorphismen und Retrakte

Wie jeder Funktor erhält $\pi_1 : \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ Isomorphismen und Retrakte, so wie wir dies in Satz H4F bereits allgemein nachgerechnet haben:

- 1 Jeder Homöomorphismus $(f, g) : (X, x_0) \cong (Y, y_0)$ in Top_* induziert einen Isomorphismus $(f_\#, g_\#) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ in Grp .
- 2 Jeder Retrakt $(f, g) : (X, x_0) \xrightarrow{\sim} (Y, y_0)$ in Top_* induziert einen Retrakt $(f_\#, g_\#) : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, y_0)$ in Grp .

Übung: Wiederholen Sie dieses abstrakt-einfache Argument für Funktoren allgemein und wenden Sie es dann hier speziell an.

Beweis: (2) Aus $g \circ f = \text{id}_{(X, x_0)}$ folgt dank Funktorialität (L2D)

$$\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \pi_1(g \circ f) = \pi_1(\text{id}_{(X, x_0)}) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}.$$

(1) Aus $f \circ g = \text{id}_{(Y, y_0)}$ folgt ebenso $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$. QED

Isomorphismen und Retrakte

Wir haben das alles bereits allgemein nachgerechnet, siehe Satz H4F, nun profitieren Sie von Ihrer guten Vorbereitung. Zur Wiederholung und weil es so elegant und einfach ist, hier nochmal als kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0) \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow g & \downarrow \text{id} \\
 (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (Y, y_0)
 \end{array}
 \xRightarrow{\pi_1}
 \begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y, y_0) \\
 \text{id} \downarrow & \swarrow g_\# & \downarrow \text{id} \\
 \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(Y, y_0)
 \end{array}$$

Top_{*} Grp

Wir Menschen sind Augenwesen, daher lohnt es sich, Formeln *und* Bilder zu nutzen, ganz genauso linearen Text *und* übersichtliche Diagramme. Beides ergänzt sich hilfreich, bitte lernen Sie daher, beides zu nutzen: So arbeiten Sie effizienter, sowohl beim Lernen als auch beim Anwenden.

Anwendung: komplexe Wurzeln

Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden stetigen Abbildungen p_n erlaubt eine stetige Rechtsinverse r_n , das bedeutet $p_n \circ r_n = \text{id}$?

- (a) $p_n : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto x^n$
- (b) $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$
- (c) $p_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$
- (d) $p_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto z^n$

Lösung: (a) Für $n \geq 1$ haben wir $r_n = \sqrt[n]{x}$. (b) Ebenso für n ungerade. In (a,b) ist p_n dann sogar ein Homöomorphismus, also r_n eindeutig. Andernfalls ist p_n nicht surjektiv, daher existiert keine Rechtsinverse.

(c) Hier ist $\pi_1(p_n) \cong (\mathbb{Z} \xrightarrow{-n} \mathbb{Z})$ rechtsinvertierbar nur für $n = 1$.

(d) Dies führen wir zurück auf (c): Die Abbildung $p_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt $p_n(0) = 0$ und $p_n(\mathbb{C}^*) \subseteq \mathbb{C}^*$. Für jede Rechtsinverse $r_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folgt $r_n(0) = 0$ und $r(\mathbb{C}^*) \subseteq \mathbb{C}^*$. Die Einschränkung $r_n^* : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ wäre rechtsinvers zu $p_n^* : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, was (c) widerspricht.

Anwendung: komplexe Wurzeln

Was bedeutet das? Wir suchen eine stetige Wurzelfunktion $r_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. Diese soll die definierende Gleichung $(r_n(z))^n = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ erfüllen. Für $n = 1$ genügt $r_1 = \text{id}$. Für $n \geq 2$ hingegen ist es unmöglich!

😊 Auch diese Rechnung formuliere ich ausführlich als Diagramm. Es organisiert übersichtlich alle Daten und betont die Funktorialität:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[\text{???}]{r_n} & (\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[z \mapsto z^n]{p_n} & (\mathbb{C}^*, 1) \\
 \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[\text{???}]{\pi_1(r_n)} & \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) & \xrightarrow[\alpha^k \mapsto \alpha^{kn}]{\pi_1(p_n)} & \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \\
 \text{deg} \Big\downarrow \cong \Big\uparrow \varphi & & \text{deg} \Big\downarrow \cong \Big\uparrow \varphi & & \text{deg} \Big\downarrow \cong \Big\uparrow \varphi \\
 (\mathbb{Z}, +) & \xrightarrow[k \mapsto km]{\cdot m} & (\mathbb{Z}, +) & \xrightarrow[k \mapsto kn]{\cdot n} & (\mathbb{Z}, +)
 \end{array}$$

Aus $p_n \circ r_n = \text{id}_{(\mathbb{C}^*, 1)}$ folgt $\pi_1(p_n) \circ \pi_1(r_n) = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)}$, also $mn = 1$.

Das ist nur für $n = \pm 1$ möglich, zusammen mit $n \in \mathbb{N}$ bleibt nur $n = 1$.

Am Ende ist die Rechnung in $\mathbb{Z}$ ganz leicht. Funktorialität sei Dank!

Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

😊 Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ sind homotopie-invariant dank ihrer Definition. Allerdings hängen sie vom gewählten Fußpunkt x_0 ab, und diese Abhängigkeit wollen und müssen wir sorgfältig berücksichtigen.

Satz L2G: Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

Jede Homotopie $H : f \simeq g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ relativ x_0 induziert Gleichheit $\pi_1(f) = \pi_1(g) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

Wir erhalten so den (kovarianten) Funktor $\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$.

Beweis: Die Abbildung $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ ist stetig mit $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in X$ sowie $H(s, x_0) = y_0$ für alle $s \in [0, 1]$.

Für jeden Weg $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ folgt $K : f \circ \alpha \sim g \circ \alpha$ vermöge der Homotopie $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y : (s, t) \mapsto H(s, \alpha(t))$.

Diese Homotopie führt von $K(0, t) = f(\alpha(t))$ nach $K(1, t) = g(\alpha(t))$ bei festen Endpunkten $K(s, 0) = K(s, 1) = H(s, x_0) = y_0$ für alle $s, t \in [0, 1]$.

Also gilt $f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = g_{\#}([\alpha])$. QED

Homotopie-Invarianz bei festem Fußpunkt

Korollar L2H: Isomorphismen und Retrakte

Wie jeder Funktor erhält $\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ Isomorphismen und Retrakte, so wie wir dies in Satz H4F bereits allgemein nachgerechnet haben:

- 1 Jede Homotopie-Äquivalenz $(f, g) : (X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ in $\mathbf{Top}_*$, mit $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, x_0)} \text{ rel } \{x_0\}$ und $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y, y_0)} \text{ rel } \{y_0\}$, induziert einen Isomorphismus $(f_{\#}, g_{\#}) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ in $\mathbf{Grp}$.
- 2 Jeder schwache Retrakt $(f, g) : (X, x_0) \rightleftarrows (Y, y_0)$ in $\mathbf{Top}_*$, das bedeutet $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, x_0)} \text{ rel } \{x_0\}$, induziert einen Retrakt $(f_{\#}, g_{\#}) : \pi_1(X, x_0) \rightleftarrows \pi_1(Y, y_0)$ in $\mathbf{Grp}$, also $g_{\#} \circ f_{\#} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Übung: Wiederholen Sie dieses abstrakt-einfache Argument für Funktoren allgemein und wenden Sie es dann hier speziell an.

Korollar L2I: starke Deformationsretrakte

Ist $(\iota, \rho) : (X, x_0) \simeq (Y, y_0)$ ein starker Deformationsretrakt, $\rho \circ \iota = \text{id}_X$ und $\iota \circ \rho \simeq \text{id}_Y \text{ rel } \iota(X)$, so folgt $(\iota_{\#}, \rho_{\#}) : \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ in $\mathbf{Grp}$.

Beispiel L2j: Kreislinie und gelochte Ebene

Aus $(\iota, \rho) : (\mathbb{S}^1, 1) \simeq (\mathbb{C}^*, 1)$ folgt $(\iota_{\sharp}, \rho_{\sharp}) : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.

Inklusion $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ und Retraktion $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}^1 : z \mapsto z/|z|$ erfüllen $\rho \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$ und $H : \iota \circ r \simeq \text{id}_{\mathbb{C}^*} \text{ rel } \mathbb{S}^1$ mit $H(t, z) = (1-t)z + tz/|z|$ (G4o). Eine weitere schöne Anwendung: Wie berechnen wir $\pi_1(\text{GL}_n \mathbb{R}, 1_{n \times n})$?

Beispiel L2k: $\pi_1(\text{GL}_n \mathbb{R}, 1_{n \times n})$

Das Gram–Schmidt–Verfahren (G5G) zeigt, dass $\text{GO}_n \subseteq \text{GL}_n \mathbb{R}$ und $\text{SO}_n \subseteq \text{GL}_n^+ \mathbb{R}$ starke Deformationsretrakte sind. Damit finden wir:

$$\begin{array}{llll} \text{GL}_2^+ \mathbb{R} \simeq \text{SO}_2 \mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1 & \text{dank F1Q} & \implies & \pi_1 \cong \mathbb{Z} \quad \text{dank J1I} \\ \text{GL}_3^+ \mathbb{R} \simeq \text{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3 & \text{dank K2P} & \implies & \pi_1 \cong \mathbb{Z}/2 \quad \text{dank L6T} \end{array}$$

Die Gruppe $\pi_1(\text{SO}_3 \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2$ ist physikalisch höchst relevant: Sie erklärt, warum es Spin- $1/2$ -Teilchen geben kann. Diese wiederum führen zum Pauli–Ausschlussprinzip und damit zur Stabilität der Materie.

Wir sehen hieran eindrucksvoll die vereinfachende Kraft der Homotopie: Den 4-dimensionalen Raum $\text{GL}_2^+ \mathbb{R} = \{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid ad - bc > 0 \}$ können wir zusammenziehen auf den 1-dimensionalen Unterraum $\text{SO}_2 \mathbb{R} = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid a^2 + b^2 = 1 \} \cong \mathbb{S}^1$. Für Letzteren lässt sich π_1 leicht ausrechnen. Noch drastischer fällt dies für $\text{SO}_3 \subseteq \text{GL}_3^+ \mathbb{R}$ aus.

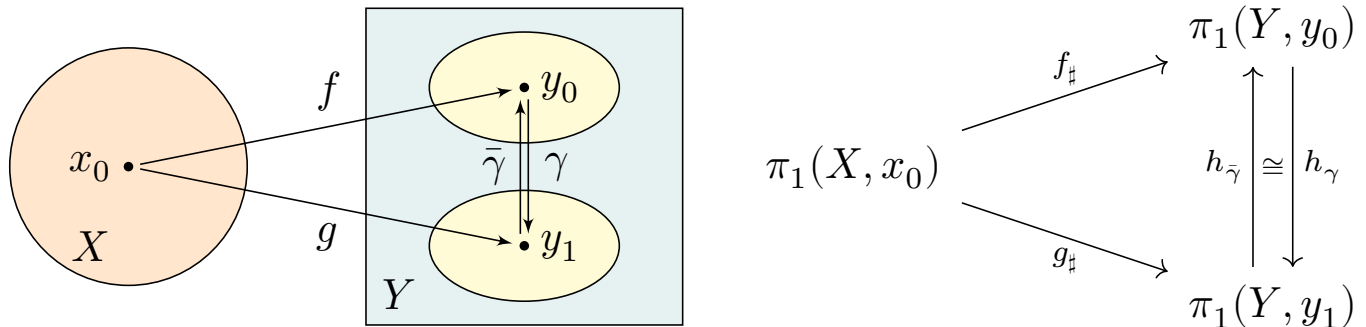
Beispiel L2l:

Ist $\{x_0\}$ ein starker Deformationsretrakt von X , so ist $\pi_1(X, x_0)$ trivial.

Dies zeigt erneut, dass die Gruppe $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ trivial ist. Auch im rationalen Kamm $X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1]_{\mathbb{Q}} \times [0, 1])$ ist der Punkt $x_0 = (0, 0)$ ein starker Deformationsretrakt, also ist $\pi_1(X, x_0)$ trivial.

⚠ Hingegen ist $x_1 = (0, 1)$ in X kein starker Deformationsretrakt (G5E). Wir wissen aber auf anderen Wegen aus L2B, dass auch $\pi_1(X, x_1)$ trivial sein muss, denn X ist wegzusammenhängend. Diese Feinheiten bei der nötigen Fußpunktwahl wollen wir nun noch etwas genauer ausleuchten.

Sobald Homotopien die Fußpunkte bewegen, müssen wir unsere obigen Argumente verfeinern und Formeln korrigieren. Das gelingt wie folgt:



Sei $H : f \simeq g : X \rightarrow Y$ eine Homotopie. Im Allgemeinen sind $y_0 := f(x_0)$ und $y_1 := g(x_0)$ verschieden, daher haben die Gruppenhomomorphismen $f_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ und $g_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1)$ verschiedene Zielgruppen! Doch H induziert eine Konjugation zwischen ihnen entlang dem Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y : t \mapsto H(t, x_0)$ des Fußpunktes. Das bedeutet:

Satz L2M: Homotopie konjugiert.

Aus $H : f \simeq g : X \rightarrow Y$ folgt $g_\# = h_\gamma \circ f_\#$ mit dem Weg $\gamma(t) = H(t, x_0)$.

Beweis: Für jede Schleife α in (X, x_0) ist $f \circ \alpha$ eine Schleife in (Y, y_0) und $g \circ \alpha$ eine Schleife in (Y, y_1) . Dank L1J gilt in $P(X)$ bzw. $\Pi(X)$:

$$(g \circ \alpha) \sim \bar{\gamma} * (f \circ \alpha) * \gamma \quad \implies \quad [g \circ \alpha] = [\bar{\gamma}] \cdot [f \circ \alpha] \cdot [\gamma]$$

Die induzierten Gruppenhomomorphismen

$$f_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

$$g_\# : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_1) : [\alpha] \mapsto [g \circ \alpha]$$

sind demnach konjugiert gemäß $g_\# = h_\gamma \circ f_\#$.

QED

😊 Fixiert H den Fußpunkt wie in L2G, so gilt $h_\gamma = \text{id}$ und $f_\# = g_\#$.

Im Falle $y_0 = y_1$ wird der Fußpunkt während der Homotopie bewegt, kehrt aber schließlich in seine Ausgangsposition zurück. In diesem Falle ist γ eine Schleife in (Y, y_0) , und h_γ ist die Konjugation durch $c = [\gamma]$ in der Gruppe $\pi_1(Y, y_0)$. Ist diese zudem abelsch, dann ist jede Konjugation trivial, und wir dürfen die Bewegung des Fußpunktes in Y ignorieren. Das ist eine erfreuliche, aber leider seltene Ausnahme!

Korollar L2N: Homotopie-Äquivalenz

- (1) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopie-Äquivalenz. Für $x_0 \in X$ und $y_0 = f(x_0)$ ist dann $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenisomorphismus.
- (2) Ist X zusammenziehbar, $X \simeq *$, so gilt $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ für alle $x_0 \in X$.

Das Kriterium (2) vereinfacht unser voriges Argument L2L, da wir nun auch ohne starken Deformationsretrakt $\{x_0\} \subseteq X$ auskommen.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit Homotopien $H : g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $K : f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Anwendung des Funktors π_1 und Homotopie-Invarianz (L2M) ergibt $\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = h_{\alpha}$ mit $\alpha(t) = H(t, x_0)$ und $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) = h_{\beta}$ mit $\beta(t) = K(t, y_0)$, also $h_{\alpha}^{-1} \circ \pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ und $\pi_1(f) \circ \pi_1(g) \circ h_{\beta}^{-1} = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$.

Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(f)$ ist demnach sowohl links- als auch rechts-invertierbar, somit invertierbar (H2K). QED

Das Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ ist natürlich, aber weniger übersichtlich, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist etwas übersichtlicher, dafür aber weniger natürlich, da wir willkürlich einen Fußpunkt wählen müssen.

Am liebsten möchte man die Vorzüge des Fußpunktes nutzen, aber seine Nachteile ignorieren; manche Lehrbücher tun so. Das ist nur zulässig, solange man die nötigen Präzisierungen und Reparaturen jederzeit nachholen kann. Für den Anfang kann ich diese Schludrigkeit nicht empfehlen; erfahrungsgemäß kommt sie später von ganz allein.

Machen wir es also richtig und nehmen wir die Begriffe ernst. Für die Definition der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist und bleibt der Fußpunkt $x_0 \in X$ wesentlich und darf nicht leichtfertig weggelassen werden.

Das ist naturgemäß der Preis, den wir zahlen müssen, wenn wir das elegant-allgemeine Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ in einem Punkt zur bequem-speziellen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ lokalisieren wollen.

Definition L2s: einfacher und höherer Zusammenhang

Für jeden topologischen Raum X vereinbaren wir folgende Begriffe:

X ist wegzusammenhängend	$:\Leftrightarrow$	$\pi_0(X) = \{X\}$
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
X ist 0-zusammenhängend	$:\Leftrightarrow$	$[\mathbb{S}^0, X] = \{*\}$
$\Uparrow \Downarrow \mathbb{S}^1$		$\Uparrow$
X ist einfach zusammenhängend	$:\Leftrightarrow$	$\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
X ist 1-zusammenhängend	$:\Leftrightarrow$	$[\mathbb{S}^0, X] = \{*\}$ und $[\mathbb{S}^1, X] = \{*\}$
$\Uparrow \Downarrow \mathbb{S}^2$		$\Uparrow$
X ist n -zusammenhängend	$:\Leftrightarrow$	$[\mathbb{S}^k, X] = \{*\}$ für alle $0 \leq k \leq n$
$\Uparrow \Downarrow \mathbb{S}^{n+1}$		$\Uparrow$
X ist ∞ -zusammenhängend	$:\Leftrightarrow$	$[\mathbb{S}^k, X] = \{*\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$
$\Uparrow \Downarrow W$		$\Uparrow$
X ist zusammenziehbar	$:\Leftrightarrow$	$[X, X] = \{*\}$
$\Uparrow \Downarrow$		
$X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig		

Einfacher und höherer Zusammenhang

Satz L2τ: einfacher Zusammenhang

Genau dann ist X einfach zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ die Menge $\Pi(X, x_0, x_1)$ genau eine Wegeklasse enthält.

Beweis: Wegzusammenhang bedeutet $\Pi(X, x_0, x_1) \neq \emptyset$ für jedes Paar $x_0, x_1 \in X$. Jede Wahl $[\gamma] \in \Pi(X, x_0, x_1)$ definiert ein Bijektionspaar

$$\Pi(X, x_0, x_1) \cong \pi_1(X, x_0), \quad [\beta] \mapsto [\alpha] = [\beta * \bar{\gamma}], \quad [\beta] = [\alpha * \gamma] \leftarrow [\alpha].$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Aussagen klar. QED

Bemerkung: Zur Bedingung $[\mathbb{S}^k, X] = \{*\}$ ist äquivalent, dass jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^k \rightarrow X$ zusammenziehbar ist und $\pi_0(X) = \{X\}$ gilt (G4R).

Speziell für $k = 1$ bedeutet das $\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.

Diese Eigenschaft des Raumes X ist von Fußpunkten unabhängig: Da X wegzusammenhängend ist, sind je zwei Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph (L2B). Ist eine trivial, so sind alle trivial.

Beispiel / Übung L2u: Zusammenhang der Sphären

Die Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist k -zusammenhängend für $k < n$, aber nicht für $k = n$.

Beweis: Für $n = 0$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ unzusammenhängend. Für $n \geq 1$ ist die Sphäre $\mathbb{S}^n$ hingegen $(n - 1)$ -zusammenhängend: Für $0 \leq k < n$ ist jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ zusammenziehbar, kurz $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ (I4B). Jedoch ist $\mathbb{S}^n$ nicht n -zusammenhängend, denn die Identität $\text{id} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ist nicht zusammenziehbar (J4A).

Genauer gilt $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (J3A), also $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \neq \{*\}$. QED

Bemerkung: Auch für $k > n$ könnte man $[\mathbb{S}^k, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ vermuten, das ist jedoch falsch! Die Vermutung entsteht aus einem allzu verständlichen Grund, nämlich Mangel an Anschauung, Erfahrung, Phantasie, etc. Wie sehen solche Abbildungen aus? Die Frage blieb lange offen.

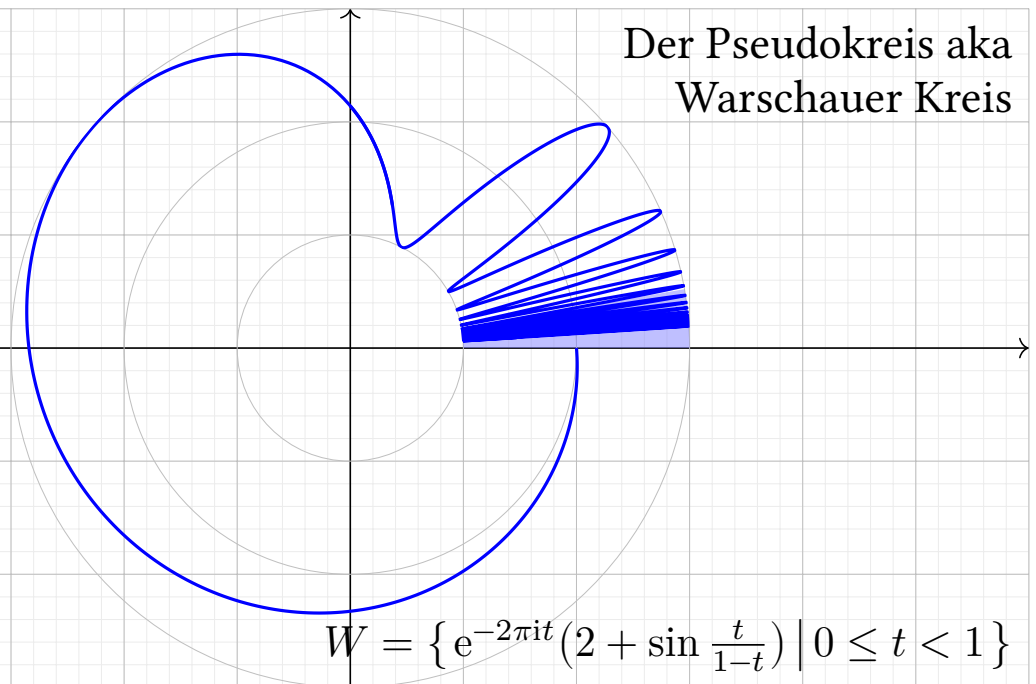
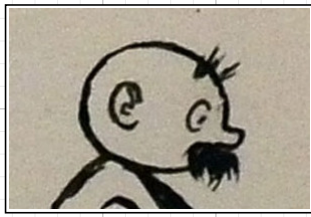
Heinz Hopf zeigte 1931, dass die Hopf-Faserung $p : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$ mit $p(a, b, c, d) = (2ac + 2bd, 2ad - 2bc, c^2 + d^2 - a^2 - b^2)$ nicht zusammenziehbar ist, kurz $p \not\simeq *$, somit $[\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2] \neq \{*\}$.

Anschaulich misst der Funktor $[\mathbb{S}^k, -]$ Löcher der Dimension k .

Es ist viel nützlicher, stetige Abbildungen und Homotopien zu definieren und $[\mathbb{S}^k, X]$ zu berechnen als naiv-vage über das Konzept „Loch“ zu spekulieren. Selbst wenn X irgendwo eingebettet ist, sollen topologische Begriffe wie der Zusammenhang von X hiervon unabhängig sein.

Kurzum: Mit $[\mathbb{S}^k, X]$ können wir k -dimensionale Löcher begreifen.

Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^k \rightarrow X$ ist genau dann nullhomotop (G4A), also im Raum X zusammenziehbar, geschrieben $f \simeq *$, wenn eine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{k+1} \rightarrow X$ mit $F|_{\mathbb{S}^k} = f$ existiert (G4F). Anschaulich testet $f : \mathbb{S}^k \rightarrow X$ auf ein k -dimensionales Loch: Ein solches liegt vor, wenn zu f keine stetige Fortsetzung $F : \mathbb{D}^{k+1} \rightarrow X$ mit $F|_{\mathbb{S}^k} = f$ existiert.



Dieser interessante Raum ist ein berühmt-berüchtigtes Gegenbeispiel:
Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $[S^k, W] = \{*\}$, dennoch ist W nicht zusammenziehbar!

Bemerkung: Offensichtlich gilt: Ist X zusammenziehbar, so auch n -zusammenhängend für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Der oben gezeigte Teilraum $W \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Pseudokreis** oder **Warschauer Kreis**. Er ist n -zusammenhängend für alle n , aber dennoch ist W nicht zusammenziehbar. Die Aussage $[S^n, W] = \{*\}$ ist relativ leicht zu zeigen. (Versuchen Sie es!) Hingegen ist $\text{id}_W \neq *$ nicht so leicht (siehe M2I).

Übung: Der Pseudokreis umschließt augenscheinlich ein inneres Gebiet. In diesem „Löwenkäfig des Topologen“, sagen wir im Nullpunkt, sitzt ein Löwe, den wir als punktförmig annehmen. Kann er aus dem Käfig entkommen? Genauer gesagt: entlang eines stetigen Weges in der Ebene? (Fliegen, Springen, Tunneln, Teleportation, etc. sind hier keine Option.)

Bemerkung: Statt W nutzt man auch den Abschluss $\overline{W} = W \cup [1, 3]$ mit ähnlichen Eigenschaften. Der Raum $\overline{W} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt und wickelt die Sinuskurve des Topologen um die Kreislinie S^1 . Er schließt sich recht eigenartig, doch man kann darin nicht umlaufen.

😊 Für „vernünftige“ Räume können solche Pathologien nicht auftreten. Der folgende schöne und durchschlagende Satz von Henry Whitehead (1904–1960) ist grundlegend für die Homotopietheorie:

Satz L2v: Whitehead 1949

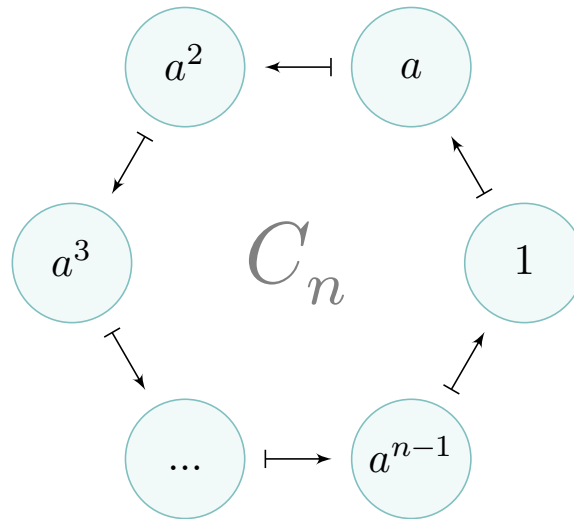
Sei X triangulierbar, also homöomorph zur Realisierung $|K|$ eines Simplicialkomplexes K ; es genügt eine Homotopie-Äquivalenz $X \simeq |K|$, etwa ein Zellkomplex oder eine Mannigfaltigkeit.

Genau dann ist X zusammenziehbar, wenn jede stetige Abbildung $\mathbb{S}^n \rightarrow X$ zusammenziehbar ist, also $[\mathbb{S}^n, X] = \{*\}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

📖 J.H.C. Whitehead: *Combinatorial homotopy I, II*. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949) 213–245, 453–496. Damit wird die Frage, ob unser Raum X zusammenziehbar ist, in einfachere Teilfragen zerlegt und somit einer Induktion über die Dimension $n = 0, 1, 2, \dots$ zugänglich. Diese Technik wird in der Algebraischen Topologie genutzt und ausgebaut.

Zur Untersuchung eines topologischen Raumes X sind die Menge $\pi_0(X)$ und die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ meist die ersten Schritte. Die Algebraische Topologie ergänzt dies durch die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$ sowie die Homologie $H_*(X)$ und die Kohomologie $H^*(X)$ uvm.

So entsteht nach und nach ein umfangreicher Werkzeugkasten, der für topologische Fragen algebraische Antworten ermöglicht und umgekehrt. Als eines der wichtigsten Werkzeuge erläutern wir im Folgenden π_1 .



Beispiel: Die zyklische Gruppe $C_n = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = 1\}$ der Ordnung n wird erzeugt vom Element a mit der Relation $a^n = 1$. Dies schreiben wir

$$C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle \quad \text{oder kurz} \quad C_n = \langle a \mid a^n \rangle.$$

Übung: Diese Gruppe ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ vermöge

$$h : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \simeq (C_n, \cdot) : k + n\mathbb{Z} \mapsto a^{k+n\mathbb{Z}}$$

Beispiel: Die unendlich zyklische Gruppe $C = \langle a \mid - \rangle$ wird frei von a erzeugt, ohne Relationen. Sie ist demnach isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ vermöge

$$h : (\mathbb{Z}, +) \simeq (C, \cdot) : k \mapsto a^k.$$

Beispiel: In der Gruppe $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ gilt Vertauschung $ab = ba$. Wir können also jedes Produkt $a^{k_1}b^{\ell_1} \dots a^{k_n}b^{\ell_n}$ umordnen zu a^kb^ℓ . Weitere Relationen gibt es nicht. Wir erhalten also den Gruppenisomorphismus

$$h : (\mathbb{Z}^2, +) \simeq (G, \cdot) : (k, \ell) \mapsto a^kb^\ell.$$

Beispiel: Die Gruppe $F(\{a, b\}) = \langle a, b \mid - \rangle$ wird **frei** von a, b erzeugt, also ohne jegliche Relationen bis auf die unvermeidlichen Kürzungen $aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = 1$, die trivial in jeder Gruppe gelten.

Jedes Element schreibt sich eindeutig als reduziertes Wort, etwa $a^3b^{-2}ab^5$. Diese Gruppe ist nicht-kommutativ: Die Wörter $ab \neq ba$ sind reduziert. Dennoch können wir in jeder freien Gruppe $F(S)$ effizient rechnen.

😊 Anschaulich macht die Präsentation $G = \langle S \mid R \rangle$ zwei Aussagen:

- (1) Erzeugung: Jedes Gruppenelement $g \in G$ ist Produkt $g = s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ der Erzeuger $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ und ihrer Inversen, also $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{Z}$.
- (2) Äquivalenz: Die Relationen klären jede Mehrdeutigkeit. Genau dann ergeben zwei solche Produkte dasselbe Element $g \in G$, wenn sie durch eine Folge der angegebenen Relationen R ineinander übergehen.

Dies wollen wir nun präzisieren und ausführen. In (1) bereitet die Idee einer erzeugenden Teilmenge $S \subseteq G$ wenig begriffliche Schwierigkeiten. In (2) hingegen müssen wir zunächst erklären, was Relationen sein sollen.

Variante 1: Wir erklären das freie Monoid A^* über einem Alphabet A . Dann definieren Relationen $K \subseteq A^* \times A^*$ das präsentierte Monoid $[A \mid K]$. Präsentierte Gruppen $\langle S \mid R \rangle$ sind ein Spezialfall.

Variante 2: Wir erklären zunächst die freie Gruppe $F = \langle S \mid - \rangle$, ohne Relationen. Anschließend können wir Relationen $R \subseteq F$ als Wörter über S einführen und zur Quotientengruppe $\langle S \mid R \rangle := F / \langle R^F \rangle$ übergehen.

Die sorgsame Ausführung dieses Plans ist zwar einfach, doch länglich. Ich gebe einen soliden Crash-Kurs als funktionstüchtigen Überblick. Anschließend können wir mit topologischen Anwendungen beginnen.

Jede Gruppe lässt sich so präsentieren durch Erzeuger und Relationen. Das codiert alle nötigen Rechenregeln, daher sind Präsentationen ein universelles Werkzeug, um Gruppen zu konstruieren und zu untersuchen.

Viele unendliche Gruppen erlauben eine endliche Präsentation und damit eine konzise Beschreibung. Die kombinatorische Gruppentheorie (CGT) stellt hierzu umfangreiche Techniken zur Verfügung. In günstigen Fällen können wir gruppentheoretische Fragen damit erfreulich effizient lösen, idealerweise möglichst allgemein durch geeignete Algorithmen.

📖 J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer, 1995.
 R.C. Lyndon, P.E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer, 2001.
 H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer, 1957.

Das freie Monoid A^* über einem Alphabet A

Sei A eine Menge, die wir als **Alphabet** betrachten, und

$$A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \dots, a_n \in A \}$$

die Menge aller **Wörter** über dem Alphabet A . Ihre **Verkettung** ist

$$\circ : A^* \times A^* \rightarrow A^* : (a_1, \dots, a_m) \circ (b_1, \dots, b_n) := (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n).$$

Das n -Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n \subseteq A^*$ schreiben wir kurz $a_1 a_2 \dots a_n$.

Für $n = 1$ identifizieren wir so das einelementige Wort $(a) \in A^1 \subseteq A^*$ mit dem Buchstaben $a \in A$; hierdurch wird $A \subseteq A^*$ eine Teilmenge.

Für $n = 0$ bezeichnet $e := ()$ das leere Wort. Damit ist $(A^*, \circ, e)$ das **freie Monoid** über A : Nach Konstruktion schreibt sich jedes Element $w \in A^*$ eindeutig als Produkt $w = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$ der Länge $n \in \mathbb{N}$ mit den Faktoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Wie üblich kann dabei zur Abkürzung das Produktsymbol $\circ$ auch weggelassen werden. Wie in jedem Monoid schreiben wir für das n -fache Produkt $uu \dots u$ kurz u^n , also $u^0 := e$, $u^1 := u$, $u^2 := uu$, $u^3 := uuu$, und rekursiv $u^{n+1} := u^n \circ u$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Monoidpräsentation durch Erzeuger und Relationen

Wir wollen Relationen $w \equiv w'$ einführen. Gegeben sei $K \subseteq A^* \times A^*$; wir erlauben **Ersetzungen** $uwv \rightarrow uw'v$ mit $u, v \in A^*$ und $(w, w') \in K$. Diese erzeugen die Äquivalenzrelation $\equiv$ auf A^* als die reflexive, symmetrische, transitive Hülle von $\rightarrow$. (Zwei Wörter in A^* sind genau dann äquivalent, wenn sie durch eine endliche Folge von Ersetzungen und ihren Umkehrungen ineinander übergehen.) Sie ist eine **Kongruenz** auf $(A^*, \circ)$, d.h. aus $u \equiv u'$ und $v \equiv v'$ folgt $u \circ v \equiv u' \circ v'$. Somit ist auf der Quotientenmenge $A^*/\equiv$ die Verknüpfung $[u] \cdot [v] := [u \circ v]$ wohldefiniert.

Definition L3A: Monoidpräsentation

Das durch (A, K) **präsentierte Monoid** ist das Tripel $([A \mid K], \cdot, 1)$ mit

$$[A \mid K] := A^*/K := A^*/\equiv, \quad [u] \cdot [v] := [u \circ v], \quad 1 := [e]$$

und dem Quotientenhomomorphismus $\pi_{(A, K)} : A^* \rightarrow A^*/K : u \mapsto [u]$.

Für $[\{a_1, a_2, \dots\} \mid \{(u_1, v_1), \dots\}]$ schreiben wir $[a_1, a_2, \dots \mid u_1 = v_1, \dots]$.

⚠ Die Äquivalenzklasse $[w] \in [A \mid K]$ kürzt man oft fahrlässig mit w ab. Dieser Missbrauch der Notation ist bequem und daher weit verbreitet. Vor dem Schlendrian machen Sie es bitte möglichst lange richtig.

Warnung: Die Frage der Gleichheit in $[A \mid K]$ ist beliebig schwierig... Im Allgemeinen ist das **Wortproblem** in $(A^*, \equiv)$ algorithmisch unlösbar! Wir können im Allgemeinen nicht entscheiden, ob zwei Repräsentanten $u, v \in A^*$ äquivalent sind oder nicht, also im Quotienten $[A \mid K] = A^* / \equiv$ dieselbe Klasse $[u] = [v]$ darstellen oder verschiedene Klassen $[u] \neq [v]$.

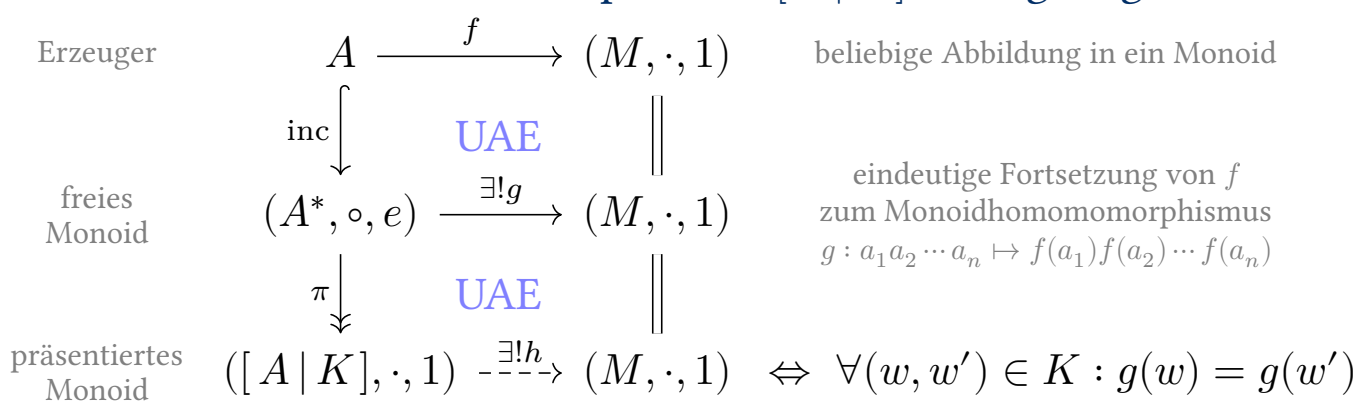
Beispiel: Wir schreiben $[A \mid -] = [A \mid \{\}]$ für das (freie) Monoid erzeugt von A mit der leeren Relationenmenge $K = \{\}$. Die etwas umständlich-redundante Schreibweise soll betonen, dass *keine* Relationen vorliegen.

😊 In diesem Falle gilt $[w] = \{w\}$ für jedes Wort $w \in A^*$. Wir erhalten demnach den Monoidisomorphismus $A^* \cong [A \mid -]$ mit $w \mapsto [w] = \{w\}$. Hier ist das Wortproblem trivial: Genau dann gilt $u \equiv v$ in $(A^*, \equiv)$, wenn $u = v$ in $(A^*, =)$ gilt. Letzteres prüfen wir buchstabenweise.

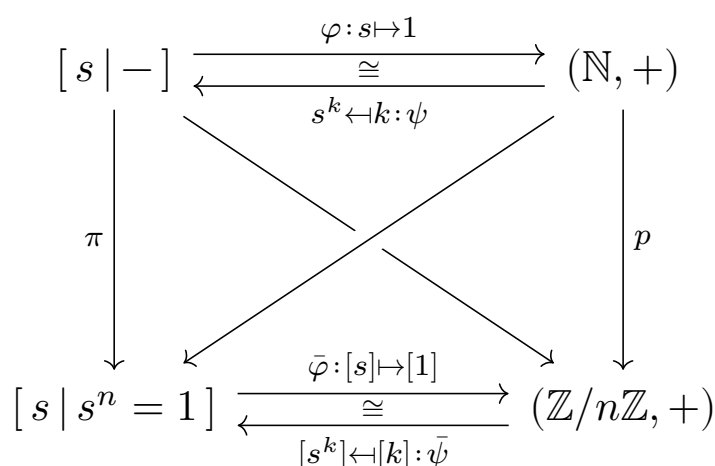
Monoidpräsentation: universelle Abbildungseigenschaft

L308

😊 Im Monoid $[A \mid K]$ mag der Vergleich von Elementen schwierig sein, die Konstruktion von Homomorphismen $[A \mid K] \rightarrow M$ gelingt leicht!



Jede Abbildung $f : A \rightarrow M$ in ein Monoid $(M, \cdot, 1)$ setzt sich eindeutig fort zu dem Monoidhomomorphismus $g : (A^*, \circ, e) \rightarrow (M, \cdot, 1)$. Das ist die universelle Abbildungseigenschaft des freien Monoids A^* . Genau dann induziert g einen Monoidhomomorphismus $h : ([A \mid K], \cdot, 1) \rightarrow (M, \cdot, 1)$ mit $g = h \circ \pi$, wenn „ $K \subseteq \text{Ker}(g)$ “ gilt, genauer gesagt $g(w) = g(w')$ für alle $(w, w') \in K$. Dann nämlich gilt Gleichheit $g(w) = g(w')$ für alle Wörter $w, w' \in A^*$ mit $w \equiv w'$, und wir erhalten $h : [w] \mapsto g(w)$.



Für das freie Monoid $M = [s \mid -] := [\{s\} \mid \{\}]$ über einem Erzeuger s haben wir $(\varphi, \psi) : (M, \cdot) \cong (\mathbb{N}, +)$ dank $\varphi : s \mapsto 1$ und $\psi : k \mapsto s^k$. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für das Monoid $C_n = [s \mid s^n = 1] := [\{s\} \mid \{(s^n, e)\}]$ finden wir $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) : (C_n, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dank $\bar{\varphi} : [s] \mapsto (1 + n\mathbb{Z})$ und $\bar{\psi} : (k + n\mathbb{Z}) \mapsto [s^k]$.

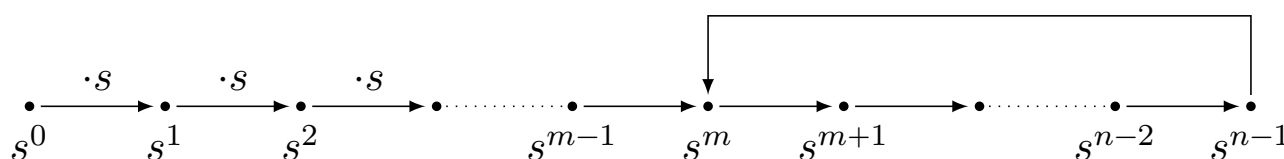
😊 Wir *konstruieren* zunächst φ und ψ auf den ursprünglichen Mengen, vor der Quotientenbildung, denn hier gelingt es leicht. Damit *induzieren* wir $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ auf den Quotienten, und (erst) hier gilt der Isomorphismus.

Monoidpräsentation: zyklische Monoide

L310

Aufgabe: Wie viele Elemente hat $C_{n,m} := [s \mid s^n = s^m]$ mit $0 \leq m < n$?

Lösung: Für $m = 0$ ist dies die zyklische Gruppe der Ordnung n . Wir konstruieren den **Cayley-Graphen** von $C_{n,m}$ bezüglich $\{s\}$:



Folgen aus $s^n = s^m$ eventuell noch weitere, versteckte Relationen? Nein, und das zeigen wir am besten durch ein konkretes Modell!

Hier verhilft uns der Satz von Cayley zu einer expliziten Darstellung: Wir realisieren $C_{n,m}$ als ein konkretes Monoid von Abbildungen!

Hierzu betrachten wir die Menge $X = \{0, \dots, n-1\}$ und die Abbildung $\sigma : X \rightarrow X$ mit $\sigma(k) = k+1$ für $0 \leq k < n-1$ und $\sigma(n-1) = m$. Dann sind $\text{id}_X = \sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{n-1}$ paarweise verschieden und $\sigma^n = \sigma^m$. Das Monoid $M = \{\sigma^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ hat somit genau n Elemente, und wir erhalten den Monoidisomorphismus $(C_{n,m}, \cdot, 1) \simeq (M, \circ, \text{id}_X) : s \mapsto \sigma$

🔍 Welche Monoidpräsentation steckt hinter der Flächenklassifikation?

Sei $\mathcal{F} = \{[F_g^\pm] \mid g \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Homöomorphieklassen zshgder geschlossener Flächen. Hierauf ist die verbundene Summe $\sharp : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ wohldefiniert durch $[A] \sharp [B] \mapsto [A \sharp B]$ (K4c), assoziativ, kommutativ, neutral ist $[\mathbb{S}^2]$. Schneiden und Kleben zeigt: Alle geschlossenen Flächen werden erzeugt vom Torus $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong F_1^+$ und der reell-projektiven Ebene $P = \mathbb{RP}^2 \cong F_0^-$, zudem gilt die Dycksche Relation K3N.

$$F_g^+ \cong \mathbb{S}^2 \sharp T^{\sharp g}, \quad F_g^- \cong P^{\sharp(g+1)}, \quad T \sharp P \cong P \sharp P \sharp P.$$

Der Klassifikationssatz K4c besagt $(\mathcal{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2]) \cong [t, p \mid tp = pt = p^3] =: M$. Ausführlich: Die UAE liefert den Monoidhomomorphismus $h : M \rightarrow \mathcal{F}$ mit $t \mapsto [T]$ und $p \mapsto [P]$, da die Relationen $tp = pt = p^3$ in $\mathcal{F}$ erfüllt sind. Surjektivität von h gilt, da $\mathcal{F}$ von $[T], [P]$ erzeugt wird. Es bleibt noch die Injektivität zu zeigen: Jedes Wort in t, p können wir dank der Relationen umformen zu t^g bzw. p^{g+1} mit $g \in \mathbb{N}$. Die Bilder $[T^{\sharp g}]$ bzw. $[P^{\sharp(g+1)}]$ sind verschieden dank unserer topologischen Invarianten: Orientierbarkeit und Euler-Charakteristik. Das Monoid $(\mathcal{F}, \sharp, [\mathbb{S}^2])$ ist nicht zyklisch!

Monoidpräsentation: effizient und universell

🔍 Lässt sich jedes Monoid $(M, \cdot, 1)$ so präsentieren? Ja!

(1) Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ haben wir den Monoidhomomorphismus $g : A^* \rightarrow M : (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 \cdots a_n$. Dieser ist surjektiv gdw die Menge A das Monoid M erzeugt. Die Wahl von A passen wir dem Beispiel an. Wenn uns partout nichts Besseres einfällt, so genügt etwa $A = M$.

(2) Anschließend wählen wir eine Menge von Relationen $K \subseteq A^* \times A^*$, die in K gelten, wir stellen also $g(u) = g(v)$ für alle $(u, v) \in K$ sicher. Daher induziert $g : A^* \twoheadrightarrow M$ den Homomorphismus $h : [A \mid K] \twoheadrightarrow M$. Dieser ist injektiv, wenn K alle Relationen in M erzeugt. Wenn uns partout nicht Besseres einfällt, so genügt $K = \{(u, v) \mid g(u) = g(v)\}$. Je nach Anwendung ist auch hier eine geschicktere Wahl möglich.

Beispiel: Wir betrachten die Verknüpfung $\cdot : M \times M \rightarrow M$ als (große) Multiplikationstafel und setzen $A := M$ und $K := \{((a, b), (c)) \mid a \cdot b = c\}$. Für jedes Wort $w \in A^*$ gilt dann $w \equiv g(w)$. (Warum?) Daraus erhalten wir die Präsentation $(h, k) : [A \mid M] \simeq M$ mit $h([w]) = g(w)$ und $k(a) = [a]$, denn $h \circ k : a \mapsto [a] \mapsto a$ und $k \circ h : [w] \mapsto g(w) \mapsto [g(w)]$.

Die freie Gruppe $F(S) = \langle S \mid - \rangle$ und freie Reduktion

Beispiel: $\langle a, b \mid - \rangle = \{1, a^{e_1}, b^{e_1}, a^{e_1}b^{e_2}, b^{e_1}a^{e_2}, a^{e_1}b^{e_2}a^{e_3}, b^{e_1}a^{e_2}b^{e_3}, \dots\}!$ mit $e_i \in \mathbb{Z}^*$. Jedes Gruppenelement tritt genau einmal auf, insb. $ab \neq ba$.

Zur Erzeugermenge S betrachten wir das „verdoppelte“ Alphabet

$$A = S^\pm := S \times \{\pm 1\} = \{s^+ = (s, +), s^- = (s, -) \mid s \in S\}.$$

Die Inversion $^{-1} : A \rightarrow A : s^\pm \mapsto s^\mp$ ist eine fixpunktfreie Involution.

Wir nutzen die Injektion $\iota : S \hookrightarrow A : s \mapsto s^+$ und schreiben kurz $s = s^+$.

Wir wollen $s^+s^- = s^-s^+ = 1$ und erhalten so die **freie Gruppe** über S :

$$F(S) := \langle S \mid - \rangle := [A \mid K] \quad \text{mit} \quad K = \{(s^+s^-, e), (s^-s^+, e) \mid s \in S\}.$$

😊 Wortproblem: Wir können jedes Gruppenwort über $S = \{s_i \mid i \in I\}!$ reduzieren zu $w = s_{i_1}^{e_1} s_{i_2}^{e_2} \cdots s_{i_\ell}^{e_\ell}$ mit $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_\ell$ und $e_1, e_2, \dots, e_\ell \in \mathbb{Z}^*$. Frei reduzierte Wörter sind genau dann äquivalent, wenn sie gleich sind.

😊 Schöne und erhellende Übung: Dieses Ersetzungssystem (A, K) ist *terminierend* und *konfluent*, mündet also immer im selben Ergebnis, siehe  V. Diekert et al: *Discrete Algebraic Methods*, de Gruyter 2016, Kapitel 8.

Gruppenpräsentation durch Erzeuger und Relationen

Definition L3B: Gruppenpräsentation

Zur Erzeugermenge S nutzen wir das Alphabet $A = S^\pm \supseteq S$.

Zur Relationenmenge $R \subseteq A^*$ setzen wir

$$K := \{(r, e) \mid r \in R\} \cup \{(s^+s^-, e), (s^-s^+, e) \mid s \in S\}.$$

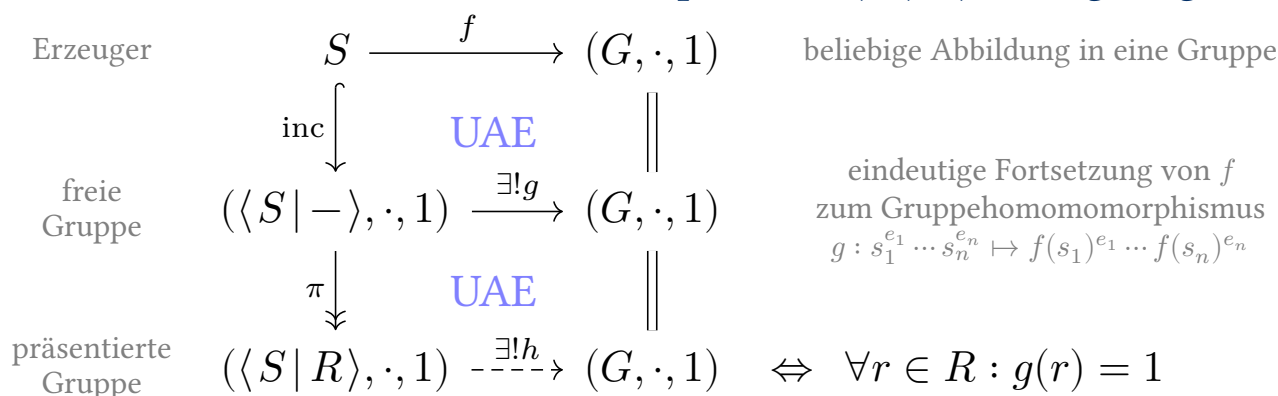
Die durch (S, R) **präsentierte Gruppe** ist dann $\langle S \mid R \rangle := [A \mid K]$ mit

$$[a_1 \cdots a_n] = g \mapsto g^{-1} = [a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}],$$

denn es gilt $g \cdot g^{-1} = 1$ und $g^{-1} \cdot g = 1$. Jede **Relation** $u = v$ können wir nun als **Relator** $r := uv^{-1} \stackrel{\pm}{=} 1$ schreiben. Statt $\langle \{s_1, s_2, \dots\} \mid \{r_1, r_2, \dots\} \rangle$ schreiben wir $\langle s_1, s_2, \dots \mid r_1, r_2, \dots \rangle$ oder $\langle s_1, s_2, \dots \mid r_1 = r_2 = \dots = 1 \rangle$.

Wir nutzen Monoide als die einfachere und grundlegendere Struktur. Anschließend betrachten wir Gruppen als Spezialfall, indem wir jeden Erzeuger $s \in S$ verdoppeln zu $s^\pm$ und die Relation $s^+s^- = 1$ hinzufügen. Gruppen und ihre Präsentationen stehen fortan im Fokus.

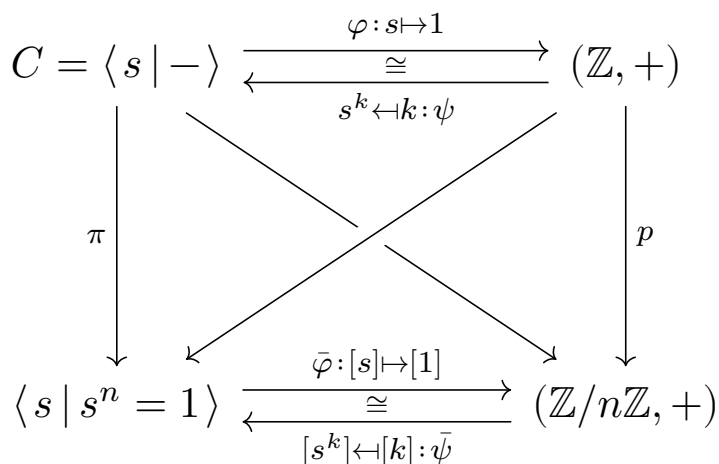
😊 In der Gruppe $\langle S | R \rangle$ mag der Vergleich von Elementen schwierig sein, die Konstruktion von Homomorphismen $\langle S | R \rangle \rightarrow G$ gelingt leicht!



Jede Abbildung $f : S \rightarrow G$ in eine Gruppe $(G, \cdot, 1)$ setzt sich eindeutig fort zu dem Gruppenhomomorphismus $g : (\langle S | - \rangle, \cdot, 1) \rightarrow (G, \cdot, 1)$. Das ist die universelle Abbildungseigenschaft der freien Gruppe $F(S) = \langle S | - \rangle$.

Genau dann induziert g einen / den ersehnten Gruppenhomomorphismus $h : (\langle S | R \rangle, \cdot, 1) \rightarrow (G, \cdot, 1)$ mit $g = h \circ \pi$, wenn $R \subseteq \text{Ker}(g)$ gilt, das heißt $g(r) = 1$ für alle $r \in R$. Dann nämlich gilt $g(w) = g(w')$ für alle Wörter $w, w' \in A^*$ mit $w \equiv w'$, und wir erhalten $h : [w] \mapsto g(w)$.

Gruppenpräsentation: zyklische Gruppen



Ausführlich setzen wir $f : \{s^\pm\} \rightarrow \{\pm 1\}$ fort zu $g : \{s^\pm\}^* \rightarrow \mathbb{Z}$, prüfen die Relationen $g(s^+s^-) = g(s^-s^+) = g(e) = 0$, und erhalten so $\varphi : C \rightarrow \mathbb{Z}$. Umgekehrt, für $\psi : k \mapsto s^k$ prüfen wir, dass $(C, \cdot)$ eine Gruppe ist, und nutzen die universelle Eigenschaft der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$, ebenso frei über 1.

😊 Wir *konstruieren* zunächst φ und ψ auf den ursprünglichen Mengen, vor der Quotientenbildung, denn hier gelingt es leicht. Damit *induzieren* wir $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ auf den Quotienten, und (erst) hier gilt der Isomorphismus.

Die freie abelsche Gruppe

Beispiel: Monoide und Gruppen sind im Allgemeinen nicht kommutativ. Zur Kommutativität genügt, dass alle Erzeuger kommutieren, etwa dank expliziter Vertauschungsregel als Teil der Relationen:

$$[s_1, \dots, s_n \mid s_i s_j = s_j s_i : i, j = 1, \dots, n] \cong \mathbb{N}^n : s_i \mapsto e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid s_i s_j = s_j s_i : i, j = 1, \dots, n \rangle \cong \mathbb{Z}^n : s_i \mapsto e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Dies nennen wir das **freie abelsche Monoid** bzw. die **freie abelsche Gruppe** über den n Erzeugern $s_1, \dots, s_n$. Stillschweigend gehen wir bei $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ immer davon aus, dass alle Buchstaben verschieden sind, also $s_i \neq s_j$ für alle $i \neq j$ gilt. Dies schreiben wir kurz $S = \{s_1, \dots, s_n\}^!$.

Genauso gelingt das freie abelsche Monoid bzw. die freie abelsche Gruppe über jeder beliebigen Erzeugermenge S , egal ob endlich oder unendlich.

Aufgabe: Präsentieren Sie $(\mathbb{Z}_{>0}, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$. **Fundamentalsatz:**

$$(\mathbb{Z}_{>0}, \cdot) \simeq [p : p \in \mathbb{P} \mid pq = qp : p, q \in \mathbb{P}] \cong \mathbb{N}^{(\mathbb{P})} : p \mapsto p$$

$$(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot) \simeq \langle p : p \in \mathbb{P} \mid pq = qp : p, q \in \mathbb{P} \rangle \cong \mathbb{Z}^{(\mathbb{P})} : p \mapsto p$$

Präsentation einer vorgegebenen Gruppe

Definition L3k: Präsentation einer vorgegebenen Gruppe

Eine **Präsentation** der Gruppe G ist ein Quadrupel (S, R, h, k) aus einer Präsentation (S, R) und einem Isomorphismuspaar $(h, k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$.

Gilt $G = \langle S \rangle$ für eine endliche Teilmenge $S \subseteq G$, so heißt die Gruppe G **endlich erzeugt** durch S . Gilt stärker $G \cong \langle S \mid R \rangle$ mit S und R endlich, so nennen wir G **endlich präsentiert** durch (S, R) .

Wenn nur die Existenz von S endlich oder (S, R) endlich gefordert ist, so sprechen wir von **endlich erzeugbar** und **endlich präsentierbar**.

Beispiel: Wir haben $(h, k) : \langle s \mid s^n \rangle \cong (\mathbb{Z}/n, +)$ mit $s^k \mapsto k + n\mathbb{Z}$.

😊 Der Isomorphismus $h : \langle S \mid R \rangle \simeq G$ parametrisiert G durch $\langle S \mid R \rangle$. Die Umkehrung k schreibt Elemente von G als Wörter über S modulo R . Wegen $k = h^{-1}$ genügt es, nur h anzugeben. Das ist meist bequemer.

😊 Wir stehen vor zwei entgegengesetzten Aufgaben: „Hier ist (S, R) , bestimme die Gruppe $\langle S \mid R \rangle$!“ vs „Hier ist G , finde eine Präsentation!“

Gruppenpräsentation: $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$

Aufgabe: Präsentieren Sie $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$.

Lösung: Wie oben gilt $(h, k) : \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$ mit $h(s) = 1$ und $k(n) = s^n$.

Jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ schreibt sich als Bruch $r = z/n!$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Somit wird $(\mathbb{Q}, +)$ erzeugt von $r_n = 1/n!$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dabei gilt $n \cdot r_n = r_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir erhalten so die Präsentation

$$(\mathbb{Q}, +) \leftarrow \langle s_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \mid s_n^n = s_{n-1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \rangle =: (G, \cdot) : \frac{1}{n!} \leftarrow s_n.$$

Dieser Gruppenhomomorphismus $h : (G, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ ist wohldefiniert, denn jede definierende Relation $s_n^n = s_{n-1}$ in $(G, \cdot)$ ist dank $nr_n = r_{n-1}$ in $(\mathbb{Q}, +)$ erfüllt. zudem ist h surjektiv, denn $(r_n = h(s_n))_{n \geq 1}$ erzeugt $(\mathbb{Q}, +)$. Die Umkehrung $k(z/n!) = s_n^z$ ist wohldefiniert, denn aus $a/p! = b/q!$ mit $p \leq q$ folgt $b = a(p+1) \cdots q$ sowie $k(a/p!) = s_p^a = \dots = s_q^b = k(b/q!)$.

😊 Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist abelsch und **torsionsfrei**: Außer dem neutralen Element 0 enthält $(\mathbb{Q}, +)$ keine Elemente endlicher Ordnung. Dennoch ist die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ nicht frei abelsch. Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist **divisibel**: Zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert $w \in \mathbb{Q}$ mit $nw = x$.

Gruppenpräsentation: kanonisch

🤔 Erlaubt jede Gruppe eine Präsentation? Ja! Wenn uns partout nichts Besseres einfällt, so genügt hierzu die Multiplikationstabelle:

Beispiel L3E: Multiplikationstabelle als kanonische Präsentation

Jedes Monoid / jede Gruppe $(G, \cdot)$ erlaubt eine **Präsentation** (S, R) , etwa

$$\begin{aligned} [G \mid (a \circ b, c) : a, b, c \in G, a \cdot b = c] &\cong (G, \cdot) : [a] \mapsto a, \\ \langle G \mid a \circ b \circ c^{-1} : a, b, c \in G, a \cdot b = c \rangle &\cong (G, \cdot) : [a] \mapsto a. \end{aligned}$$

Ist G endlich / abzählbar, so können wir S, R endlich / abzählbar wählen.

Ist G endlich mit n Elementen, so können wir die Verknüpfungstafel $\cdot : G \times G \rightarrow G$ interpretieren als eine endliche Präsentation durch n Erzeuger und n^2 Relationen. Das ist mit wachsendem n schrecklich ineffizient, aber im Prinzip immer möglich. Je nach Anwendung sind geschicktere Wahlen möglich, kleiner und effizienter.

Übung: Beweisen Sie, dass wir in L3E tatsächlich einen kanonischen Isomorphismus erhalten. Das ist eine gute Übung zum Verständnis.

Was bedeutet eine Präsentation, praktisch und anschaulich? Beispiel:

$$P := \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

Wir wünschen uns eine Gruppe $(G, \cdot, 1_G)$ mit Elementen $x_G, y_G \in G$, welche die geforderten Relationen erfüllen, $x_G^3 = y_G^3 = (x_G \cdot y_G)^2 = 1_G$.

(1) Triviale Lösung: Die Gruppe $T = \{1_T\}$ erfüllt dies, mit $x_T = y_T = 1_T$. Diese triviale Darstellung gelingt ebenso für jede Präsentation $\langle S \mid R \rangle$.

(2) Die zyklische Gruppe $(C = \langle (1, 2, 3) \rangle, \circ, \text{id})$ erfüllt unseren Wunsch mit $x_C = (1, 2, 3)$ und $y_C = (3, 2, 1)$, denn $x_C \circ y_C = \text{id}$.

(3) Die alternierende Gruppe $(G = A_4, \circ, \text{id})$ erfüllt unseren Wunsch mit $x_G = (1, 2, 3)$ und $y_G = (2, 3, 4)$, denn $x_G \circ y_G = (1, 2)(3, 4)$.

Anschaulich suchen wir also die „größte“ Gruppe $(G, \cdot, 1)$, die von x_G, y_G erzeugt wird und die geforderten Relationen $x_G^3 = y_G^3 = (x_G \cdot y_G)^2 = 1$ erfüllt. Die Gruppe $G = A_4$ mit $x_G = (1, 2, 3)$ und $y_G = (2, 3, 4)$ scheint hierfür eine gute Kandidatin, aber ist sie wirklich maximal?

Gruppenpräsentation: Wünsche werden wahr!

😊 UAE! So definieren wir die Gruppe $P := \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$ als „maximale Lösung“ durch ihre universelle Abbildungseigenschaft:

(a) Die Gruppe P kommt mit den ausgezeichneten Elementen $x_P, y_P \in P$, und diese erfüllen die geforderten Relationen $x_P^3 = y_P^3 = (x_P \cdot y_P)^2 = 1$.

(b) Zu jeder konkurrierenden Gruppe G mit Elementen $x_G, y_G \in G$ und den geforderten Relationen $x_G^3 = y_G^3 = (x_G \cdot y_G)^2 = 1_G$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $h : P \rightarrow G : x_P, y_P \mapsto x_G, y_G$.

Aufgabe: (1) Existiert eine solche Lösung? (2) Inwiefern ist sie eindeutig?

Lösung: (1) Ja, die Existenz verdanken wir unserer obigen Konstruktion als Äquivalenzklassen von Wörtern. (2) Ja, sind P und Q zwei Lösungen, so sind sie eindeutig isomorph! Es existiert genau ein Homomorphismus $h : P \rightarrow Q : x_P, y_P \mapsto x_Q, y_Q$ und umgekehrt $k : Q \rightarrow P : x_Q, y_Q \mapsto x_P, y_P$. Für diese gilt $k \circ h = \text{id}_P$, denn dies ist der einzige Homomorphismus $P \rightarrow P$ mit $x_P, y_P \mapsto x_P, y_P$. Ebenso gilt $h \circ k = \text{id}_Q$, denn dies ist der einzige Homomorphismus $Q \rightarrow Q$ mit $x_Q, y_Q \mapsto x_Q, y_Q$.

Übung: Für $P := \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$ finden wir das Modell A_4 mit $x_G = (1, 2, 3)$ und $y_G = (2, 3, 4)$, denn $x_G \cdot y_G = (1, 2)(3, 4)$. Zeigen Sie, mit viel Geduld, dass P höchstens 12 Elemente hat. Folgern Sie daraus $P \cong A_4$ mit $x \mapsto (1, 2, 3)$ und $y \mapsto (2, 3, 4)$.

Übung: Für $Q := \langle x, y \mid x^5 = y^2 = (xy)^3 = 1 \rangle$ finden wir als Modell die alternierende Gruppe A_5 mit $x_G = (1, 2, 3, 4, 5)$ und $y_G = (1, 2)(3, 4)$. Zeigen Sie, mit noch mehr Geduld, dass Q höchstens 60 Elemente hat. Folgern Sie daraus $Q \cong A_5$ mit $x \mapsto (1, 2, 3, 4, 5)$ und $y \mapsto (1, 2)(3, 4)$.

😊 Für sehr kleine Beispiele kann man solche Rechnungen gerade noch per Hand durchführen und dabei viel lernen. Probieren Sie es selbst! Eine Ausführung bietet math.stackexchange.com/questions/4588584.

Die systematische Behandlung führt zum **Todd–Coxeter–Algorithmus**. Ist die präsentierte Gruppe P endlich, so *konstruiert* er eine vollständige Liste aller Elemente, und sein Abschluss *beweist* die Vollständigkeit.

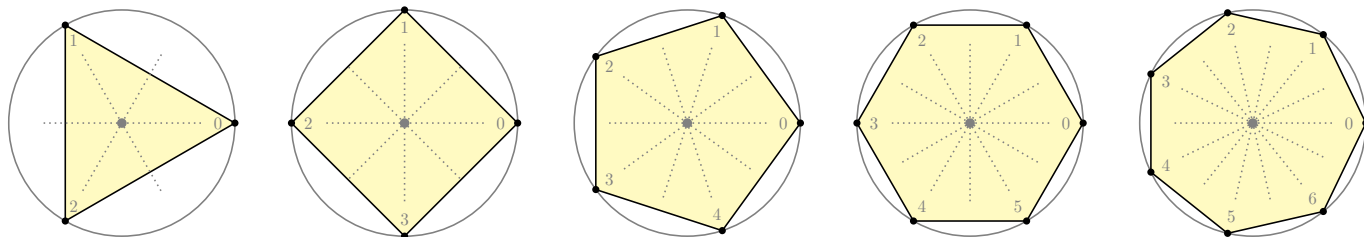
😊 Bequem nutzbar, effizient implementiert und gründlich getestet finden Sie dies zum Beispiel in GAP, <https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap47>. Zur Illustration zeige ich die beiden obigen Elementezählungen mit GAP. GAP erkennt zudem typische Gruppen: symmetrisch, alternierend, uvm.

```

1 gap> F := FreeGroup( "x", "y" );;
2 gap> x := F.1;; y := F.2;;
3 gap> G := F / [ x^3, y^3, (x*y)^2 ];;
4 gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
5 [ 12, "A4" ]
6
7 gap> F := FreeGroup( "x", "y" );;
8 gap> x := F.1;; y := F.2;;
9 gap> G := F / [ x^5, y^2, (x*y)^3 ];;
10 gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
11 [ 60, "A5" ]

```

Wir betrachten das reguläre n -Eck $P_n \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ zu $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$:



Die **Diedergruppe** D_n^I besteht aus den euklidischen Isometrien von P_n :

$$D_n^I = \left\{ \underbrace{\rho_k : z \mapsto z e^{2\pi i k/n}}_{\text{genau } n \text{ Drehungen}}, \underbrace{\sigma_k : z \mapsto \bar{z} e^{2\pi i k/n}}_{\text{... und } n \text{ Spiegelungen}} \mid k = 0, \dots, n-1 \right\} \subseteq \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$$

Beispiel: Die acht Elemente von D_4^I sind $\rho_k : z \mapsto z i^k$ und $\sigma_k : z \mapsto \bar{z} i^k$.

Es gilt $\text{id} = \rho_0 \in D_n^I$, und zu $f, g \in D_n^I$ gilt $f \circ g \in D_n^I$ sowie $f^{-1} \in D_n^I$.

In der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{C})$ ist daher D_n^I eine **Untergruppe**.

Die Menge D_n^I mit der Komposition $\circ$ ist somit selbst eine **Gruppe**:

- (a) Die Komposition $\circ : D_n^I \times D_n^I \rightarrow D_n^I$ ist wohldefiniert und assoziativ.
- (b) Die Isometrie $\text{id} = \rho_0 \in D_n^I$ ist neutral bezüglich Komposition.
- (c) Zu jeder Isometrie $f \in D_n^I$ existiert eine inverse Isometrie $g \in D_n^I$.

Die Diedergruppe als Isometrien des regulären n -Ecks

Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Isometrie**, wenn sie den euklidischen Abstand d erhält, also $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt.

Verschiebungen sind Isometrien, ebenso Drehungen und Spiegelungen.

Die Isometrien, die uns hier interessieren, fixieren alle den Ursprung.

Die Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{C}, 0)$ besteht aus allen Drehungen $z \mapsto za$ und allen Spiegelungen $z \mapsto \bar{z}a$, wobei $a \in \mathbb{S}^1$, also $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$.

Zur expliziten Konstruktion von $P_n = [w_0, w_1, \dots, w_{n-1}]$ wählen wir als Eckpunkte die n ten Einheitswurzeln $w_k = e^{2\pi i k/n}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Übung: $D_n^I = \{g \in \text{Isom}(\mathbb{C}, 0) \mid f(P_n) = P_n\}$ ist eine Unter/Gruppe.

Erstellen Sie für $n = 4$ die Verknüpfungstabelle, möglichst übersichtlich.

Es bleibt die Frage: Warum gilt $\text{Isom}(\mathbb{C}, P_n) = D_n^I$ wie oben angegeben?

Klar ist „ $\supseteq$ “. Wir zeigen umgekehrt „ $\subseteq$ “: Hierzu sei $g \in \text{Isom}(\mathbb{C}, P_n)$.

Als Isometrie bildet g Ecken auf Ecken ab und Kanten auf Kanten.

Zunächst drehen wir $g(w_0)$ auf w_0 , dann spiegeln wir ggf. $g(w_1)$ auf w_1 .

So finden wir eine Drehung oder Spiegelung $f \in D_n^I$ mit $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{C}}$:

Alle Ecken werden festgehalten, also ganz $\mathbb{C}$. Das zeigt $g = f^{-1} \in D_n^I$.

Die Diedergruppe in Matrixdarstellung

Drehungen und Spiegelungen können wir durch Matrizen darstellen:

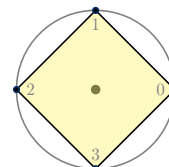
$$R_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}, \quad S_k = \begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & -\cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}$$

Diese $2n$ Matrizen fassen wir zusammen zur **Dieder-Matrixgruppe**:

$$D_n^M = \{ R_0, R_1, \dots, R_{n-1}, S_0, S_1, \dots, S_{n-1} \} \subseteq \text{GL}_2 \mathbb{R}$$

Beispiel: Die acht Elemente der Diedergruppe $D_4^M \leq \text{GL}_2 \mathbb{Z}$ sind

$$\begin{aligned} R_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & R_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & R_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & R_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \\ S_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & S_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & S_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & S_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Es gilt $E = R_0 \in D_n^M$, und zu $A, B \in D_n^M$ gilt $A \cdot B \in D_n^M$ sowie $A^{-1} \in D_n^M$. In der allgemeinen linearen Gruppe $\text{GL}_2 \mathbb{R}$ ist D_n^M eine **Untergruppe**.

Die Menge D_n^M mit Matrixmultiplikation $\cdot$ ist somit selbst eine **Gruppe**:

- (a) Die Multiplikation $\cdot : D_n^M \times D_n^M \rightarrow D_n^M$ ist wohldefiniert und assoziativ.
- (b) Die Einheitsmatrix $E = R_0 \in D_n^M$ ist neutral bezüglich Multiplikation.
- (c) Zu jeder Matrix $A \in D_n^M$ existiert eine inverse Matrix $B \in D_n^M$.

Die Diedergruppe in Matrixdarstellung

Zu jedem Ring $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ und $n \in \mathbb{N}$ haben wir den Matrixring $(\mathbb{K}^{n \times n}, +, \cdot)$. Die invertierbaren Matrizen bilden die allgemeine lineare Gruppe $\text{GL}_n \mathbb{K}$. Eine **Matrixgruppe** ist eine Untergruppe $G \leq \text{GL}_n \mathbb{K}$, d.h. sie enthält die Einheitsmatrix und ist abgeschlossen unter Komposition und Inversion; wir haben also $E \in G$, und für $A, B \in G$ gilt $A \cdot B \in G$ sowie $A^{-1} \in G$. Die Menge G mit Matrixmultiplikation $\cdot$ ist somit selbst eine **Gruppe**.

Wir nutzen dies hier speziell für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Jede Matrix $A \in \text{GL}_n \mathbb{R}$ operiert auf $\mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto Ax$. So können wir Drehungen und Spiegelungen bequem durch Matrizen darstellen:

$$\rho_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto R_k \cdot x, \quad \sigma_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto S_k \cdot x$$

Wie üblich ist es sinnvoll, Matrizen und Abbildungen zu unterscheiden. Damit ist ρ_k die Drehung um den Winkel $2\pi k/n$ und σ_k die Spiegelung an der Achse, die gegen die x -Achse im Winkel $\pi k/n$ geneigt ist.

Übung: Zeigen Sie, dass D_n^M eine Matrixgruppe ist, wie angegeben. Erstellen Sie für $n = 4$ die Verknüpfungstabelle, möglichst übersichtlich.

Wir können die Isometrien durch Permutationen der Ecken darstellen:

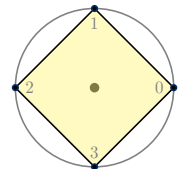
$$r_k : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n : x \mapsto k + x, \quad s_k : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n : x \mapsto k - x$$

Diese fassen wir zusammen zur **Dieder-Permutationsgruppe**:

$$D_n^p = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\} \subseteq S_n$$

Beispiel: Die acht Permutationen der Diedergruppe $D_4^p < S_4$ sind

$$\begin{aligned} r_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, & r_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, & r_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & r_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ s_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, & s_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, & s_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, & s_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Es gilt $\text{id} = r_0 \in D_n^p$, und zu $a, b \in D_n^p$ gilt $a \circ b \in D_n^p$ sowie $a^{-1} \in D_n^p$.

In der symmetrischen Gruppe S_n ist daher D_n^p eine **Untergruppe**.

Die Menge D_n^p mit der Komposition $\circ$ ist somit selbst eine **Gruppe**:

- (a) Die Komposition $\circ : D_n^p \times D_n^p \rightarrow D_n^p$ ist wohldefiniert und assoziativ.
- (b) Die Identität $\text{id} = r_0 \in D_n^p$ ist neutral bezüglich Komposition.
- (c) Zu jeder Permutation $a \in D_n^p$ existiert eine inverse $b \in D_n^p$.

Die Diedergruppe in Permutationsdarstellung

Zu jeder Menge X bildet die Menge S_X aller Bijektionen $\sigma : X \xrightarrow{\sim} X$ die symmetrische Gruppe $(S_X, \circ, \text{id}_X)$. Im Spezialfall $X = \{1, \dots, n\}$ oder wie hier $X = \mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ schreiben wir dafür kurz S_n . Wir identifizieren $\mathbb{Z}_n$ mit der Eckenmenge $W_n = \{w_0, \dots, w_{n-1}\}$

Jede Isometrie $g \in \text{Isom}(\mathbb{C}, P_n)$ wirkt auf der Eckenmenge W_n , erfüllt also $g(W_n) = W_n$. Die Einschränkung $\text{Isom}(\mathbb{C}, P_n) \rightarrow \text{Sym}(W_n)$ ordnet so jeder Isometrie g eine Permutation $\sigma = g|_{W_n}^{W_n}$ zu. Umgekehrt wird die Isometrie g bereits durch ihre Eckenpermutation σ eindeutig festgelegt, die Einschränkung $\text{Isom}(\mathbb{C}, P_n) \rightarrow \text{Sym}(W_n) : g$ ist also injektiv.

Wir setzen dazu $n \geq 3$ voraus. Für $n = 2$ und $P_2 = [-1, 1]$ gilt das nicht, denn $D_2^l = \{\pm \text{id}, \pm \text{conj}\}$ hat Ordnung 4, doch $S_{\{-1,1\}}$ nur Ordnung 2.

Übung: Zeigen Sie, dass D_n^p eine Unter/Gruppe ist, das heißt, sie enthält die Identität und ist abgeschlossen unter Komposition und Inversion. Damit erfüllt D_n^p die Gruppeneigenschaften (a-c) wie oben angegeben. Erstellen Sie für $n = 4$ die Verknüpfungstabelle, möglichst übersichtlich.

Diese drei Darstellungen sind isomorph.

Die Gruppe $D_n^I < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ und $D_n^M < GL_2 \mathbb{R}$ und $D_n^P \leq S_n$ begreifen wir konkret als Untergruppe der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ der Ebene, der allgemeinen linearen Gruppe $GL_2 \mathbb{R}$ und der symmetrischen Gruppe S_n . Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ sind die Gruppen D_n^I und D_n^M und D_n^P isomorph:

$$\begin{array}{ccccc} (D_n^M, \cdot) & \xleftarrow[\varphi^{-1}]{\varphi} & (D_n^I, \circ) & \xleftarrow[\psi^{-1}]{\psi} & (D_n^P, \circ) \\ R_k, S_k & & \rho_k, \sigma_k & & r_k, s_k \end{array}$$

In der Gruppe D_n^I ist die Menge $C_n^I = \{\rho_0, \dots, \rho_{n-1}\}$ der Drehungen eine Untergruppe: Sie ist abgeschlossen unter Komposition, sie enthält das neutrale Element $\rho_0 = \text{id}$ und zu jedem Element f sein Inverses f^{-1} .

Arbeitssparnis: Assoziativität vererbt sich automatisch von D_n^I auf C_n^I .

Die Gruppe $(C_n^I, \circ, \text{id})$ ist isomorph zur zyklischen Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +, 0)$:

$$h : (\mathbb{Z}_n, +, 0) \xrightarrow{\sim} (C_n^I, \circ, \text{id}) : k \mapsto \rho_k$$

Die Menge $D_n^I \setminus C_n^I$ der Spiegelungen hingegen ist keine Untergruppe: Die Komposition von zwei Spiegelungen ist selbst keine Spiegelung!

Was lernen wir daran?

Zur Anschauung und Motivation ist es meist hilfreich, so wie hier mit konkreten Beispielen anzufangen. Ich tue dies mit Absicht und Bedacht: Ein gut gewähltes, interessantes Beispiel bereichert unseren Fundus. Es ist keine Wegwerf-Illustration, sondern verdient Wertschätzung.

Was ist wesentlich an einer „Gruppe“? Das ist nicht leicht zu extrahieren! Jedes konkrete Beispiel ist dekoriert mit zufälligen, überflüssigen Details. Die Diedergruppen D_n^I , D_n^M , D_n^P etwa sind nicht „klinisch steril“, sondern verbinden diverse Aspekte von Gruppen, Untergruppen, Operationen.

Wir fokussieren uns auf **das Wesentliche** und definieren unsere Begriffe schließlich **axiomatisch**. Dieser kühne Sprung klärt und vereinfacht! Beim ersten Durchgang wird Ihnen dieses Vorgehen noch schwerfallen, weil es für Sie zunächst ungewohnt ist, doch es bewährt sich schnell.

Die Suche nach klärender Abstraktion ist nicht nur subjektiv-didaktisch, sondern auch objektiv-historisch real. In der Geschichte der Mathematik hat es recht lange gedauert, die grundlegenden Begriffe herauszuschälen, wie Monoid und Gruppe, Ring und Körper, Modul und Vektorraum, etc.

Satz L3M: Präsentation der Diedergruppe

Für die Diedergruppe D_n mit $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir die Präsentationen

$$(1) \quad h : D_n^* := \langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^n \rangle \quad \simeq D_n : s \mapsto s_0, t \mapsto s_1$$

$$(2) \quad h' : D_n^+ := \langle r, s \mid s^2, r^n, srs = r^{-1} \rangle \simeq D_n : s \mapsto s_0, r \mapsto r_1$$

Für kleine n gilt $D_3 \cong S_3$ und $D_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ und $D_1 \cong \mathbb{Z}/2$, und $D_0 = D_\infty$ ist isomorph zu $D_0^* \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$ und zu $D_0^+ \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2$.

Beweis: Die Coxeter-Präsentation (1) nutzt Spiegelungen:

(1a) In D_n gilt $s_k^2 = 1$ und $s_i s_j = r_{i-j}$, somit $(s_0 s_1)^n = 1$. (Nachrechnen!)

(1b) Der Gruppenhomomorphismus h ist wohldefiniert und surjektiv.

(1c) Sogar injektiv? Wir können D_n^* vollständig aufzählen:

$$D_n^* = \{1, s, t, st, ts, sts, tst, \dots, sts \dots = tst \dots\}$$

Daraus folgt $\#D_n^* \leq 2n$. Demnach ist $h : D_n^* \twoheadrightarrow D_n$ bijektiv.

QED

Präsentation der Diedergruppe

😊 Für die zweite Präsentation gehen wir genauso vor:

(2a) In D_n gilt $s_k^2 = 1$ und $r_k^n = 1$ sowie $s_\ell r_k s_\ell = r_{-k}$ für alle k, ℓ .

(2b) Der Gruppenhomomorphismus h' ist wohldefiniert und surjektiv.

(2c) Sogar injektiv? Auch D_n^+ können wir vollständig aufzählen:

$$D_n^+ = \{r^k s^\ell \mid k \in \mathbb{Z}/n, \ell \in \mathbb{Z}/2\}.$$

Daraus folgt $\#D_n^+ \leq 2n$. Demnach ist $h' : D_n^+ \twoheadrightarrow D_n$ bijektiv.

QED

😊 Alternativ zeigt diese Aufzählung direkt, dass h bzw. h' injektiv ist, denn die Bilder der aufgezählten Elemente sind paarweise verschieden! Diese allgemeinere Sichtweise hilft daher auch bei *unendlichen* Gruppen.

😊 Zur Präsentation $h : \langle S \mid R \rangle \simeq G$ geben wir die drei Daten S und R und $f : S \rightarrow G$ an und prüfen daran die drei behaupteten Eigenschaften:

(a) *Definition:* Die angegebenen Relationen gelten in der Zielgruppe.

(b) *Surjektion:* Die Erzeuger reichen aus; sie erzeugen alle Elemente.

(c) *Injektion:* Die Relationen reichen aus; sie erzeugen alle Relationen.

😊 Diedergruppen werden erzeugt von Reflektionen. H.S.M. Coxeter (1907–2003) untersuchte solche **Spiegelungsgruppen** ab 1935. Parallel arbeitete Emil Artin (1898–1962) und später Jaques Tits (1930–2021) an solchen Präsentationen, bei denen die Relation $s^2 = 1$ weggelassen wird.

Wir betrachten Präsentationen mit Erzeugern $s, t, \dots$ und Relationen der speziellen Form $stst \dots = tstst \dots$, der Länge $m \in \mathbb{N}$ auf beiden Seiten. Hierzu definieren wir das Wechselprodukt $(s, t)^m := stst \dots$ der Länge m .

Gegeben sei eine Menge S und dazu eine **Coxeter–Matrix** $M = (m_{st})_{s,t \in S}$ der vorgeschriebenen Exponenten $m_{st} = m_{ts} \in \mathbb{N}$ mit $m_{ss} = 1$.

Coxeter–Gruppe: $W_M := \langle S \mid (st)^{m_{st}} : s, t \in S \rangle$

Artin–Tits–Gruppe: $A_M := \langle S \mid (s, t)^{m_{st}} = (t, s)^{m_{ts}} : s, t \in S \rangle$

Artin–Tits–Monoid: $A_M^+ := [S \mid (s, t)^{m_{st}} = (t, s)^{m_{ts}} : s, t \in S]$

Dabei entsteht W_M aus A_M und aus A_M^+ durch Hinzufügen der Relationen $s^2 = 1$ für alle $s \in S$, denn $(st)^m = 1$ bedeutet damit $(s, t)^m = (t, s)^m$.

Artin–Tits– und Coxeter–Präsentation

Beispiele: Die Diedergruppe erhalten wir für $S = \{s, t\}$ und $M = \begin{bmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{bmatrix}$.

Das freie Monoid $A_M^+ = [S \mid -]$ und die freie Gruppe $A_M = \langle S \mid - \rangle$ erhalten wir für die Coxeter–Matrix M mit $m_{st} = 0$ für alle $s \neq t$.

Mit $m_{st} = 2$ für alle $s \neq t$ sind $A_M^+ = [S \mid st = ts : s, t \in S] \cong \mathbb{N}^{(S)}$ und $A_M = \langle S \mid st = ts : s, t \in S \rangle \cong \mathbb{Z}^{(S)}$ frei abelsch sowie $W_M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(S)}$.

Auch die symmetrische Gruppe S_n lässt sich so gewinnen, siehe L3w:

$$S_n \cong \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \left| \begin{array}{ll} t_i^2 = 1 & : 1 \leq i \leq n-1 \\ t_i t_j = t_j t_i & : |i - j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & : |i - j| = 1 \end{array} \right. \right\rangle, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \dots & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Gilt $m_{st} = m_{ts} = 1$ für $s \neq t$, so folgt die Gleichheit $s = t$, wir können also Erzeuger sparen. Daher schließt man diesen Fall aus.

😊 Endliche Coxeter–Gruppen wurden 1935 von Coxeter klassifiziert in vier Familien und sechs Ausnahmen, en.wikipedia.org/wiki/Coxeter_group.

Wann ist und wie wird eine Gruppe abelsch?

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe. Für je zwei Elemente a, b sind äquivalent:

- 1 Es gilt $ab = ba$, das heißt, die Elemente a und b **kommutieren**.
- 2 Es gilt $b^{-1}ab = a$; die **Konjugation** $\gamma_b : x \mapsto x^b = b^{-1}xb$ fixiert a .
- 3 Es gilt $b = a^{-1}ba$; die **Konjugation** $\gamma_a : x \mapsto x^a = a^{-1}xa$ fixiert b .
- 4 Es gilt $a^{-1}b^{-1}ab = 1$; der **Kommutator** $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$ ist trivial.

Der Kommutator $[a, b]$ misst für a, b die Abweichung vom Kommutieren. Alle Kommutatoren in G erzeugen gemeinsam die **Kommutatorgruppe**

$$G' := \langle [G, G] \rangle = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle.$$

Sie misst, wie weit G von der Kommutativität abweicht; genau dann ist G **abelsch**, wenn $G' = \{1\}$ gilt. Wir können jede Gruppe G abelsch machen, indem wir zur Quotientengruppe G_{ab} von G modulo G' übergehen:

$$\alpha_G : G \twoheadrightarrow G_{\text{ab}} := G/G' : a \mapsto aG'$$

Diese **Abelschmachung** oder **Abelianisierung** führen wir nun aus. Frei nach Goethe: *Und bist du nicht abelsch, so brauch' ich G' walt.*

Kommutatormenge vs Kommutatorgruppe

Mit $[G, G] = \{[a, b] \mid a, b \in G\}$ bezeichne ich die Kommutator**menge**. Sie enthält das neutrale Element $1 = [1, 1]$ und ist zudem abgeschlossen unter Inversion, denn es gilt $[a, b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = [b, a]$. Hingegen ist die Menge $[G, G] \subseteq G$ im Allgemeinen *nicht* abgeschlossen unter Multiplikation. Die kleinsten Gegenbeispiele haben 96 Elemente.

 Ian D. MacDonald: *Commutators and their products*. Amer. Math. Monthly 93 (1986) 440–444. Ich zitiere aus der emphatischen Einleitung:

The beginner still has a problem. The groups with which he is familiar tend to have small orders or straightforward structures. Products of commutators in such groups tend to be commutators. An impression therefore comes about that “non-commutators” are unusual; maybe even pathological. It is our aim to persuade this beginner that “non-commutators” exist in an abundance of groups. [...] The attitude that there are only a few exotic examples, kept in glass cases in some museum of groups, is wrong.

 Oystein Ore: *Some remarks on commutators*. Proc. Amer. Math. Soc. (1951) 307–314, Theorem 1: Jede gerade Permutation ist ein Kommutator.

Wir führen die Abelschmachung nun detailliert aus. Damit der Quotient $\alpha_G : G \twoheadrightarrow G/G'$ nicht nur eine Menge, sondern wirklich eine Gruppe liefert, muss die Untergruppe G' in G normal sein, also invariant unter Konjugation. Diese grundlegende Beobachtung rechnen wir nun nach:

Satz L3N: Abelschmachung einer Gruppe

(0) In G ist G' normal. Die Quotientengruppe $G_{\text{ab}} := G/G'$ ist abelsch.

Beweis: (0) Die Konjugation mit $c \in G$ bildet die Kommutatormenge $[G, G] = \{[a, b] \mid a, b \in G\}$ in sich selbst ab, denn für alle $a, b \in G$ gilt $[a, b]^c = c^{-1}(a^{-1}b^{-1}ab)c = (c^{-1}a^{-1}c)(c^{-1}b^{-1}c)(c^{-1}ac)(c^{-1}bc) = [a^c, b^c]$.

Demnach ist die von der Menge $[G, G]$ erzeugte Kommutatoruntergruppe $G' = \langle [G, G] \rangle$ konjugationsinvariant, also normal in G , kurz $G' \trianglelefteq G$.

Demnach vererbt G die Gruppenstruktur vermöge $\alpha_G : G \twoheadrightarrow G/G'$.

Für $a, b \in G$ gilt $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in G'$, also $a^{-1}b^{-1}abG' = G'$ und somit $abG' = baG'$. Das bedeutet, die Quotientengruppe $G/G' = \{aG' \mid a \in G\}$ mit der Verknüpfung $(aG') \cdot (bG') = (ab)G'$ ist abelsch. QED

Die Kommutatoruntergruppe ist invariant.

Bemerkung: Ist $f : G \rightarrow G$ ein beliebiger Endomorphismus von G , so gilt $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, also $f([G, G]) \subseteq [G, G]$ und $f(G') \subseteq G'$. In diesem Sinne ist $G' \leq G$ eine „vollinvariante“ Untergruppe. Invarianz gilt somit insbesondere für jeden Automorphismus $f : G \xrightarrow{\sim} G$, demnach ist G' eine „charakteristische“ Untergruppe. Invarianz gilt speziell für jeden inneren Automorphismus $f : G \xrightarrow{\sim} G : x \mapsto x^g$, demnach ist G' eine „normale“ Untergruppe. Allein darauf kommt es bei der Quotientenbildung an.

Aufgabe: Es gilt $K \trianglelefteq G$ und G/K abelsch gdw $G' \leq K \leq G$.

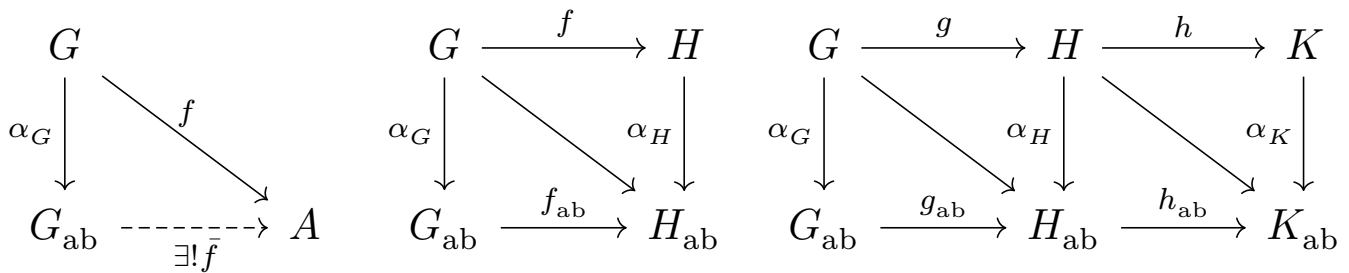
Lösung: „ $\Rightarrow$ “: Sei G/K abelsch, also $aK \cdot bK = bK \cdot aK$ für alle $a, b \in G$. Daraus folgt $abK = baK$, also $(ba)^{-1}abK = K$, und somit $[a, b] \in K$. Somit gilt $[G, G] \leq K$ und $G' = \langle [G, G] \rangle \leq K$, wie behauptet.

„ $\Leftarrow$ “: Wir wissen bereits, dass G/G' eine abelsche Gruppe ist.

Jede Untergruppe H mit $\{1\} \leq H \leq G/G'$ ist demnach normal.

Dank Korrespondenz ist jede Gruppe K mit $G' \leq K \leq G$ normal.

Ausführlich: Für alle $k \in K$ und $g \in G$ gilt $k^g \in K$, denn wir haben $k^{-1} \cdot k^g = [k, g] \in G' \leq K$ und somit $k^g = k \cdot [k, g] \in K \cdot K = K$.



Satz L3N: Abelschmachung eines Gruppenhomomorphismus

- (1) Der Quotient $\alpha_G : G \rightarrow G_{ab} : a \mapsto aG'$ hat die universelle Eigenschaft: Zu jedem Homomorphismus $f : G \rightarrow A$ in eine abelsche Gruppe existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f} : G_{ab} \rightarrow A$ mit $f = \bar{f} \circ \alpha_G$.
- (2) Jedem Homomorphismus $f : G \rightarrow H$ ordnet die Abelschmachung den eindeutigen Homomorphismus $f_{ab} : G_{ab} \rightarrow H_{ab}$ mit $\alpha_H \circ f = f_{ab} \circ \alpha_G$ zu.

Beweis: (1) Für alle Elemente $a, b \in G$ gilt $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab \in \text{Ker}(f)$, denn $f(a^{-1}b^{-1}ab) = f(a)^{-1}f(b)^{-1}f(a)f(b) = 1$. Dank $G' \leq \text{Ker}(f)$ induziert f den Homomorphismus $\bar{f} : G/G' \rightarrow A : aG' \mapsto f(a)$.

(2) Die Komposition $\alpha_H \circ f : G \rightarrow H_{ab}$ induziert $f_{ab} : G_{ab} \rightarrow H_{ab}$. QED

Die Abelschmachung ist ein Funktor.

Satz L3N: Funktorialität

- (3) Die Abelschmachung ist ein Funktor $\text{ab} : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$.
 - (3a) Für die Identität jeder Gruppe G gilt $(\text{id}_G)_{ab} = \text{id}_{G_{ab}}$.
 - (3b) Für $g : G \rightarrow H$ und $h : H \rightarrow K$ gilt $(h \circ g)_{ab} = h_{ab} \circ g_{ab}$.
- Genauer ist $(\text{inc}, \text{ab}) : \text{Ab} \xrightarrow{\sim} \text{Grp}$ eine Retraktion.

Beweis: (3a) Für $f = \text{id}_G : G \rightarrow G$ ergibt die Abelschmachung (2) durch Einsetzen $f_{ab} \circ \alpha_G = \alpha_G \circ f = \alpha_G = \text{id}_{G_{ab}} \circ \alpha_G$. Dank der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft (1) folgt hieraus $f_{ab} = \text{id}_{G_{ab}}$.

(3b) Für $f = h \circ g : G \rightarrow K$ folgt $f_{ab} = h_{ab} \circ g_{ab}$ aus obigem Diagramm: Es gilt $f_{ab} \circ \alpha_G = \alpha_K \circ f = \alpha_K \circ h \circ g = h_{ab} \circ \alpha_H \circ g = h_{ab} \circ g_{ab} \circ \alpha_G$. Dank der Eindeutigkeit (1) folgt $f_{ab} = h_{ab} \circ g_{ab}$, wie behauptet.

Speziell auf der Unterkategorie $\text{Ab} \leq \text{Grp}$ aller abelschen Gruppen ist die Abelschmachung $\text{ab} : \text{Ab} \rightarrow \text{Ab}$ äquivalent zum identischen Funktor id_{Ab} . In diesem Sinne ist die Abelschmachung $\text{ab} : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ eine Retraktion zur Inklusion $\text{inc} : \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$, kurz $(\text{inc}, \text{ab}) : \text{Ab} \xrightarrow{\sim} \text{Grp}$. QED

😊 Die Aussage „ $\text{ab} : \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ ist ein Funktor“ bedeutet ausführlich:
Wir ordnen gemäß (0) jeder Gruppe $G \in \text{Grp}$ eine abelsche Gruppe $G_{\text{ab}} \in \text{Ab}$ zu und gemäß (2) jedem Homomorphismus $f : G \rightarrow H$ von Gruppen einen Homomorphismus $f_{\text{ab}} : G_{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{ab}}$ abelscher Gruppen. Diese Zuordnung respektiert alle Identitäten gemäß (3a) und alle Kompositionen gemäß (3b). Diese Eigenschaften sind sehr nützlich, daher fassen wir sie zum Begriff des „Funktors“ zusammen.

😊 Die abstrakte Konstruktion und ihre Eigenschaften lassen sich leicht nachrechnen, wie hier zu sehen. Im Folgenden wird es darum gehen, konkrete Beispiele auszurechnen. Bemerkenswerterweise sind hier die speziellen Rechnungen weit komplizierter als die allgemeine Theorie... und sicher auch wesentlich interessanter. (So ist es ja recht oft.)

Zur Einstimmung nenne ich das Verhalten der Abelschmachung unter Sur/In/Bijektionen: Allgemeine Aussagen sind recht leicht, spezielle Gegen/Beispiele verbinden kreative Kunst mit solidem Handwerk.

Abelschmachung und Sur/In/Bijektivität

Satz L3N: Abelschmachung und Sur/In/Bijektivität

(4) Ist $g : G \rightarrow H$ bijektiv oder surjektiv, so auch $g_{\text{ab}} : G_{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{ab}}$. Injektivität hingegen bleibt bei Abelschmachung nicht erhalten!

(5) Für jeden inneren Automorphismus $f : G \rightarrow G : x \mapsto x^g = g^{-1}xg$ mit $g \in G$ gilt nach Abelschmachung $f_{\text{ab}} = \text{id}_{G_{\text{ab}}} : G_{\text{ab}} \rightarrow G_{\text{ab}}$.

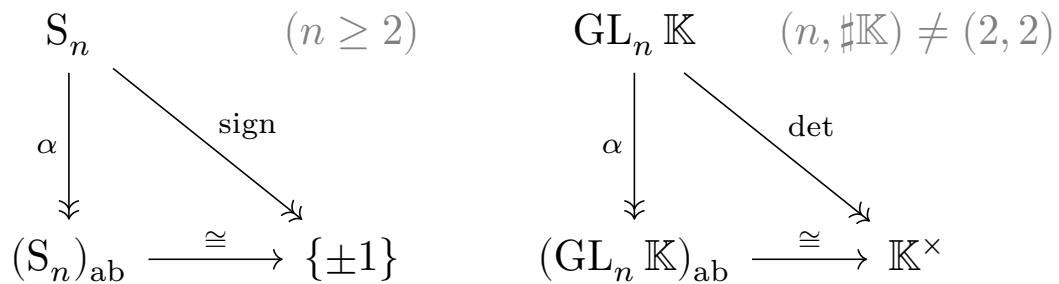
Beweis: (4a) Ist der Homomorphismus $g : G \rightarrow H$ bijektiv, so ist auch $h = g^{-1} : H \rightarrow G$ ein Homomorphismus, kurz $(g, h) : G \cong H$. Wie jeder Funktor erhält ab Isomorphismen: Aus $h \circ g = \text{id}_G$ und $g \circ h = \text{id}_H$ folgt $h_{\text{ab}} \circ g_{\text{ab}} = \text{id}_{G_{\text{ab}}}$ und $g_{\text{ab}} \circ h_{\text{ab}} = \text{id}_{H_{\text{ab}}}$, kurz $(g_{\text{ab}}, h_{\text{ab}}) : G_{\text{ab}} \cong H_{\text{ab}}$.

(4b) Aus $f : G \rightarrowtail H$ folgt $\alpha_H \circ f : G \rightarrowtail H_{\text{ab}}$ und somit $\bar{f} : G_{\text{ab}} \rightarrowtail H_{\text{ab}}$.

(4c) Wir betrachten die Abelschmachung $\text{sign} : S_n \rightarrowtail \{\pm 1\}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die Inklusion $\iota : \langle (1, 2, \dots, n) \rangle \hookrightarrow S_n$ ist injektiv, nicht jedoch ihre Abelschmachung $\iota_{\text{ab}} : \langle (1, 2, \dots, n) \rangle_{\text{ab}} \rightarrow (S_n)_{\text{ab}} \cong \{\pm 1\}$ für $n \geq 3$.

(5) Nach Konstruktion gilt $x \equiv x^g \pmod{G'}$, da $x^{-1}x^g = [x, g] \in G'$. QED

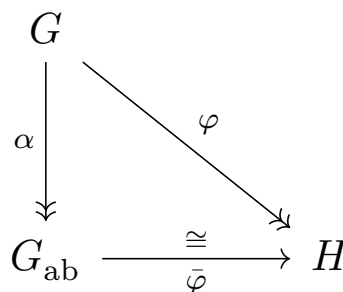
Die Lineare Algebra zeigt Ihnen zwei wichtige Abelschmachungen: die Signatur $\text{sign}_n : S_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und die Determinante $\det_{\mathbb{K}}^n : \text{GL}_n \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^\times$ für jeden Körper, ausgenommen $(n, \sharp \mathbb{K}) = (2, 2)$.



Genauer bedeutet das: Der induzierte Gruppenhomomorphismus $(S_n)_{\text{ab}} \rightarrow \{\pm 1\}$ bzw. $(GL_n \mathbb{K})_{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{K}^\times$ erweist sich als Isomorphismus. In diesem Sinne ist die Abelschmachung α zwar nicht *gleich* der Signatur bzw. Determinante, aber doch immerhin *isomorph* (siehe folgende Folie).

😊 Dies sind konkrete Inkarnationen der universellen Abelschmachung, sie werden überall in der Mathematik und ihren Anwendungen genutzt. Deshalb rechnen wir dies in den folgenden beiden Sätzen sorgsam nach.

Wie oben definiert ist die Abelschmachung, streng formal betrachtet, der Quotientenhomomorphismus $\alpha : G \twoheadrightarrow G_{\text{ab}} := G/G' : a \mapsto aG'$. Signatur und Determinante tun „im Wesentlichen“ genau das, sie sind im Folgenden Sinne *äquivalent* zur Abelschmachung:



Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ ist **äquivalent zur Abelschmachung** $\alpha : G \twoheadrightarrow G_{\text{ab}} := G/G'$, falls $\text{Ker}(\varphi) = G'$ gilt.

Anders gesagt: Der Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ hat eine abelsche Bildgruppe H , und der induzierte Gruppenhomomorphismus $\bar{\varphi} : G_{\text{ab}} \rightarrow H : aG \mapsto \varphi(a)$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \alpha$ erweist sich als Isomorphismus.

Satz L30: die Abelschmachung der symmetrischen Gruppe S_n

- (1) Die symmetrische Gruppe S_n hat als Kommutatorgruppe $S'_n = A_n$.
 (2) Weiters gilt $A'_n = A_n$, außer in den Ausnahmefällen $n \in \{3, 4\}$.

Für $n = 1$ ist $\text{sign}_1 : S_1 \simeq \{1\}$ trivial. Für $n \geq 2$ ist $\text{sign}_n : S_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$ äquivalent zur Abelschmachung, d.h. jeder Gruppenhomomorphismus $f : S_n \rightarrow A$ in eine abelsche Gruppe A faktorisiert eindeutig über sign_n : Es existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f} : \{\pm 1\} \rightarrow A$ mit $f = \bar{f} \circ \text{sign}_n$.

Beweis: (1) „ $\subseteq$ “: Nach Definition gilt $A_n := \text{Ker}(\text{sign}_n : S_n \rightarrow \{\pm 1\})$. Da die Zielgruppe $\{\pm 1\}$ abelsch ist, folgt $S'_n \subseteq A_n$. Alternativ: Jeder Kommutator $[\sigma, \tau]$ mit $\sigma, \tau \in S_n$ ist gerade, also $S'_n = \langle [S_n, S_n] \rangle \subseteq A_n$.

„ $\supseteq$ “: Wir zeigen $S'_n \supseteq A_n$. Für $n \in \{1, 2\}$ gilt $A_n = \{1\}$. Sei also $n \geq 3$. In der Gruppe $(S_n, \circ, \text{id})$ ist jeder 3-Zykel (i, j, k) ein Kommutator dank $[(i, k), (j, k)] = (i, k)(j, k)(i, k)(j, k) = (i, j, k)$. Die Gruppe A_n wird von 3-Zykeln erzeugt. (Induktion: Übung!) Also gilt $A_n \subseteq \langle [S_n, S_n] \rangle = S'_n$.

Die Signatur als Abelschmachung

L348

Erläuterung

(2) Für $n \geq 5$ folgt ebenso $A'_n = A_n$, denn jeder 3-Zykel liegt in A_n und ist ein Kommutator von zwei geeigneten 3-Zykeln, ebenfalls in A_n , gemäß $[(1, 2, 3), (1, 4, 5)] = (1, 3, 2)(1, 5, 4)(1, 2, 3)(1, 4, 5) = (1, 3, 5)$.

Für $n = 3$ ist $A_3 = \langle (1, 2, 3) \rangle$ abelsch, also $A'_3 = \{\text{id}\} \subsetneq A_3$ trivial.

Für $n = 4$ ist $A'_4 = \{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \subsetneq A_4$, genannt die Kleinsche Vierergruppe, und somit $A''_4 = \{\text{id}\}$. QED

Bemerkung: Zu jeder Gruppe $(G, \cdot, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n te **abgeleitete Gruppe** $G^{(n)}$ durch $G^{(0)} := G$ und rekursiv $G^{(n+1)} := (G^{(n)})'$. Gilt $G^{(n)} = \{1\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir die Gruppe G **auflösbar**.

Die kleinen symmetrischen Gruppen S_1, S_2, S_3, S_4 sind somit auflösbar, ebenso A_1, A_2, A_3, A_4 . Für $n \geq 5$ jedoch sind S_n und A_n nicht auflösbar. (Das entspricht der Auflösung von Polynomgleichungen vom Grad n : Für kleine Grade $n \leq 4$ existieren explizite Lösungsformeln, die mit den Körperoperationen und Wurzelziehen auskommen. Für $n \geq 5$ zeigt die Galois-Theorie, dass keine solche Lösungsformel existieren kann.)

Analog zur Signatur $\text{sign}_n : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ erkennen wir schließlich auch die Determinante $\det_{\mathbb{K}}^n : GL_n \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^\times$ als Abelschmachung. Wir formulieren dies der Einfachheit halber nur über Körpern:

Satz L3P: die Abelschmachung der allgemeinen linearen Gruppe GL_n

- (1) Für jeden Körper $\mathbb{K}$ gilt $GL'_n \mathbb{K} = SL_n \mathbb{K}$, außer für $n = 2$ und $\sharp \mathbb{K} = 2$.
 (2) Weiters gilt $SL'_n \mathbb{K} = SL_n \mathbb{K}$, außer für $n = 2$ und $\sharp \mathbb{K} \in \{2, 3\}$.

Speziell für $n = 1$ ist $\det_{\mathbb{K}}^1 : GL_1 \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^\times$ ein Gruppenisomorphismus. Für $n \geq 2$ ist $\det_{\mathbb{K}}^n : GL_n \mathbb{K} \twoheadrightarrow \mathbb{K}^\times$ äquivalent zur Abelschmachung, das bedeutet, jeder Gruppenhomomorphismus $f : GL_n \mathbb{K} \rightarrow A$ in eine abelsche Gruppe A faktorisiert eindeutig über die Determinante $\det_{\mathbb{K}}^n$: Es existiert genau ein Homomorphismus $\bar{f} : \mathbb{K}^\times \rightarrow A$ mit $f = \bar{f} \circ \det_{\mathbb{K}}^n$.

Beweis: (1) „ $\subseteq$ “: Nach Definition gilt $SL_n \mathbb{K} := \text{Ker}(\det_{\mathbb{K}}^n : GL_n \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^\times)$. Da die Zielgruppe $\mathbb{K}^\times$ abelsch ist, folgt $GL'_n \mathbb{K} \subseteq SL_n \mathbb{K}$. Alternativ: Jeder Kommutator $[A, B]$ mit $A, B \in GL_n$ hat Determinante 1, liegt also in SL_n .

„ $\supseteq$ “: Wir zeigen $GL'_n \supseteq SL_n$. Für $n = 1$ gilt $SL_1 = \{1\}$. Sei also $n \geq 2$. Sei $T_{ij}(a) = E + aE_{ij} \in SL_n$ die Transvektion zu Indizes $i \neq j$ und $a \in \mathbb{K}$; auf der Diagonalen stehen Einsen, a an der Stelle (i, j) , sonst Nullen. Dank Gauß-Algorithmus wird SL_n erzeugt von Transvektionen.

Zwischen den Transvektionen gelten folgende **Steinberg-Relationen**:

- (S0) $T_{ij}(a)T_{ij}(b) = T_{ij}(a+b)$ für alle $i \neq j$ und $a, b \in \mathbb{K}$,
 (S1) $[T_{ij}(a), T_{jk}(b)] = T_{ik}(ab)$ für i, j, k verschieden,
 (S2) $[T_{ij}(a), T_{k\ell}(b)] = 1_{n \times n}$ für $i \neq \ell$ und $j \neq k$.

Für $n \geq 3$ liegt jede Transvektion in $[SL_n, SL_n]$ dank (S1). Im Falle $n = 2$ nutzen wir einen anderen Trick: Für alle $u \in \mathbb{K}^\times$ und $U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2$ gilt $[U, T_{ij}(a)] = T_{ij}(b)$ mit $b = a(1-u)$. Dank der Voraussetzung $\sharp \mathbb{K} \geq 3$ können wir $u \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ und $a = b/(1-u)$ wählen. Somit enthält GL'_n alle Transvektionen, also auch die davon erzeugte Untergruppe SL_n .

(2) Für $n \geq 3$ folgt dank (S1) ebenso $SL'_n \supseteq SL_n$. Im Falle $n = 2$ variieren wir unseren vorigen Trick: Für alle $u \in \mathbb{K}^\times$ und $U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in SL_2$ gilt $[U, T_{ij}(a)] = T_{ij}(b)$ mit $b = a(1 - u^2)$. Dank der Voraussetzung $\sharp\mathbb{K} \geq 4$ können wir $u \in \mathbb{K} \setminus \{0, \pm 1\}$ und $a = b/(1 - u^2)$ wählen. Somit enthält SL'_n alle Transvektionen, also auch die davon erzeugte Untergruppe SL_n . Im Ausnahmefall $GL_2 \mathbb{F}_2 = SL_2 \mathbb{F}_2 \cong S_3$ gilt $SL_2 \mathbb{F}_2 \supsetneq GL'_2 \mathbb{F}_2 \cong A_3$. Für $GL_2 \mathbb{F}_3$ gilt $GL'_2 \mathbb{F}_3 = SL_2 \mathbb{F}_3$ mit $\sharp GL_2 \mathbb{F}_3 = 48$ und $\sharp SL_2 \mathbb{F}_3 = 24$, aber $\sharp SL'_2 \mathbb{F}_3 = 8$, wie man geduldig nachrechnet. QED

Bemerkung: Wir können nicht nur jede Gruppe, sondern allgemein jedes Monoid $(M, \cdot, 1)$ abelsch machen. Dies leistet der zugehörige Quotient $\alpha : (M, \cdot, 1) \rightarrow (M_{\text{ab}}, \cdot, 1)$ mit $M_{\text{ab}} = M/\equiv$, wobei die Kongruenz $\equiv$ auf M als Äquivalenzrelation erzeugt wird von $uabv \equiv ubav$ mit $u, a, b, v \in M$. Die universelle Eigenschaft lautet nun: Zu jedem Homomorphismus $\varphi : (M, \cdot, 1) \rightarrow (A, \cdot, 1)$ in ein abelsches Monoid existiert genau ein Homomorphismus $\bar{\varphi} : (M_{\text{ab}}, \cdot, 1) \rightarrow (A, \cdot, 1)$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \alpha$.

Signatur und Determinante als Abelschmachung

Die Abelschmachung zu *definieren* ist leicht, sie *auszurechnen* oft schwer. Die Rechnung liefert meist wertvolle Informationen über unsere Gruppe! Die nötige Arbeit haben wir oben bereits für unsere liebsten Gruppen investiert und ernten nun auch allgemein für unsere liebsten Monoide:

Korollar L3P: Signatur und Determinante als Abelschmachung

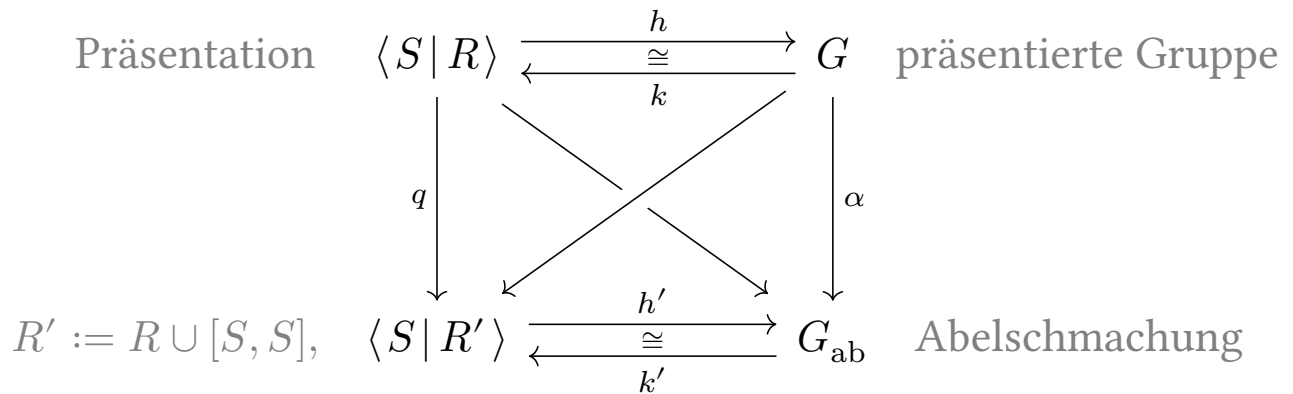
Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir die Monoidhomomorphismen

$$\begin{aligned} \text{sign}_n &: (T_n, \circ, \text{id}) \twoheadrightarrow (\{\pm 1, 0\}, \cdot, 1), \\ \det_{\mathbb{K}}^n &: (\mathbb{K}^{n \times n}, \cdot, 1_{n \times n}) \twoheadrightarrow (\mathbb{K}, \cdot, 1). \end{aligned}$$

- (1) Mit der Ausnahme $n = 1$ ist sign_n äquivalent zur Abelschmachung.
- (2) Für jeden Körper $\mathbb{K}$, mit der einzigen Ausnahme $(n, \sharp\mathbb{K}) = (2, 2)$, ist die Determinante $\det_{\mathbb{K}}^n$ äquivalent zur Abelschmachung.

Übung: Zeigen Sie, dass alle nicht invertierbaren Elemente untereinander äquivalent sind bezüglich der abelschmachenden Kongruenz $\equiv$.

Vorgelegt sei eine Präsentation (S, R, h, k) der Gruppe G mit Erzeugern S und Relationen R und dem Isomorphismus $(h, k) : \langle S | R \rangle \cong G$.



Satz L3Q: Abelschmachung einer Präsentation

Die Abelschmachung der Präsentation $(h, k) : \langle S | R \rangle \cong G$ liefert eine Präsentation der Abelschmachung, $(h', k') : \langle S | R \cup [S, S] \rangle \cong G_{\text{ab}}$.

Aufgabe: Dies folgt aus der universellen Eigenschaft der Präsentation (L3J) und der Abelschmachung (L3N). Führen Sie alles sorgfältig aus!

Abelschmachung einer Präsentation

Beweis: (1) Die Komposition $\alpha \circ h : \langle S | R \rangle \rightarrow G_{\text{ab}}$ erfüllt über die Relationen R hinaus auch R' , induziert also den Homomorphismus $h' : \langle S | R' \rangle \rightarrow G_{\text{ab}}$ mit $h' \circ q = \alpha \circ h$ dank universeller Eigenschaft L3J.

(2) Die aus (S, R) gewonnene Präsentation (S, R') mit $R' = R \cup [S, S]$ definiert eine abelsche Gruppe: In der Gruppe $\langle S | R' \rangle$ kommutieren alle Erzeuger $s, t \in S$, daher auch alle hiervon erzeugten Elemente, also *alle*.

(3) Die Komposition $q \circ k : G \rightarrow \langle S | R' \rangle$ geht dank (2) in eine abelsche Gruppe, induziert also den Homomorphismus $k' : G_{\text{ab}} \rightarrow \langle S | R' \rangle$ mit $k' \circ \alpha = q \circ k$ dank universeller Eigenschaft L3N.

(4) Da (h, k) ein Isomorphismuspaar ist, folgt dies auch für (h', k') : Es gilt $k' \circ h' = \text{id}$ und $h' \circ k' = \text{id}$ auf Erzeugern, also allgemein.

Ausführlich: Wir haben $k' \circ h' \circ q = k' \circ \alpha \circ h = q \circ k \circ h = q = \text{id} \circ q$. Dank Surjektivität / UAE von q folgt Rechtskürzbarkeit, $k' \circ h' = \text{id}$. Ebenso haben wir $h' \circ k' \circ \alpha = h' \circ q \circ k = \alpha \circ h \circ k = \alpha = \text{id} \circ \alpha$.

Dank Surjektivität / UAE von α folgt Rechtskürzbarkeit, $h' \circ k' = \text{id}$. QED

Beispiel: Für jede freie Gruppe F über einer Basis $S = \{s_1, \dots, s_r\} \subseteq F$ erhalten wir $F_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$ vermöge $s_k \mapsto e_k$ für $k = 1, \dots, r$, siehe L3c. Wir erhalten so die erneut die vertraute Präsentation

$$\langle s_1, \dots, s_r \mid s_i s_j = s_j s_i : i, j \in \{1, \dots, r\} \rangle \cong \mathbb{Z}^r.$$

Übersichtlich zusammengefasst als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \langle S \mid - \rangle & \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow[k]{\cong} \end{array} & F \\ \downarrow q & \swarrow \quad \searrow & \downarrow \alpha \\ \langle S \mid [S, S] \rangle & \begin{array}{c} \xrightarrow{h'} \\ \xleftarrow[k']{\cong} \end{array} & \mathbb{Z}(S) \end{array}$$

Die Anzahl $\sharp S$ der Basiselemente ist der **Rang** der freien Gruppe F . Diese entspricht der Dimension eines Vektorraums. Dazu zeigen wir, dass diese Zahl unabhängig von der willkürlichen Wahl einer Basis ist.

Satz L3v: Rang einer freien Gruppe

Für je zwei Mengen S und T gilt:

$$F(S) \cong F(T) \text{ in Grp} \iff S \cong T \text{ in Set}$$

Beweis: „ $\Leftarrow$ “: Dank UAE L3H setzt sich jede Bijektion $(f, g) : S \cong T$ eindeutig fort zu einem Gruppenisomorphismus $(\bar{f}, \bar{g}) : F(S) \cong F(T)$.

„ $\Rightarrow$ “: Nach L3H hat $\text{Hom}(F(S), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genau $2^{|S|}$ Elemente, und ebenso hat $\text{Hom}(F(T), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ genau $2^{|T|}$ Elemente. Jeder Gruppenisomorphismus $F(S) \cong F(T)$ induziert $\text{Hom}(F(S), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(F(T), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ also gilt $2^{|S|} = 2^{|T|}$. Im endlichen Falle folgt daraus $|S| = |T|$.

Allgemein: Wir vergleichen $A := F(S)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{(S)}$ und $B := F(T)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{(T)}$. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann sind die Quotienten $A/pA \cong (\mathbb{Z}/p)^{(S)}$ und $B/pB \cong (\mathbb{Z}/p)^{(T)}$ Vektorräume über $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ der Dimension $|S|$ bzw. $|T|$. Aus $F(S) \cong F(T)$ in Grp folgt $A \cong B$ in Ab, und somit $A/pA \cong B/pB$ in Ab und in $\text{Vec}_{\mathbb{F}_p}$, schließlich $S \cong T$ in Set dank Linearer Algebra. QED

Aufgabe: Nutzen Sie die beiden Präsentationen der Diedergruppe D_n aus Satz L3M und berechnen Sie damit die Abelschmachung für $n \geq 2$.

Lösung: Wir abelianisieren die Präsentation und vereinfachen!

(1) Die erste Präsentation, mit benachbarten Spiegelungen s, t ergibt:

$$\begin{aligned}
 D_n &\cong \langle s, t \mid s^2 = 1, t^2 = 1, (st)^n = 1 \rangle \\
 (D_n)_{\text{ab}} &\cong \langle s, t \mid s^2 = 1, t^2 = 1, (st)^n = 1, st = ts \rangle \\
 &\cong \langle s, t \mid s^2 = 1, t^2 = 1, s^n t^n = 1, st = ts \rangle \\
 \text{(a) } n \text{ ungerade:} &\cong \langle s, t \mid s^2 = 1, t^2 = 1, st = 1, st = ts \rangle \\
 &\cong \langle s, t \mid s^2 = 1, t = s^{-1} \rangle \cong \langle s \mid s^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \\
 \text{(b) } n \text{ gerade:} &\cong \langle s, t \mid s^2 = 1, t^2 = 1, st = ts \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2
 \end{aligned}$$

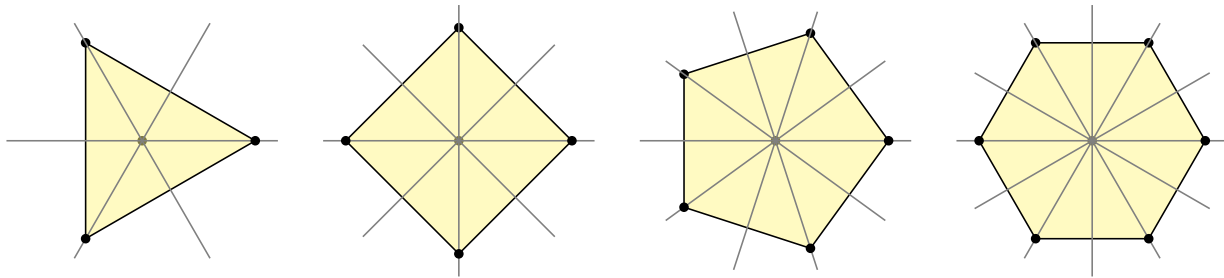
Im letzten Vereinfachungsschritt müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob der Parameter n gerade oder ungerade ist. Die abelsch gemachte Gruppe ist in beiden Fällen tatsächlich verschieden!

(2) Die zweite Präsentation, mit Rotation r und Spiegelung s , ergibt:

$$\begin{aligned}
 D_n &\cong \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 2, srs = r^{-1} \rangle \\
 (D_n)_{\text{ab}} &\cong \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 2, srs = r^{-1}, rs = sr \rangle \\
 &\cong \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, r^2 = 1, rs = sr \rangle \\
 \text{(a) } n \text{ ungerade:} &\cong \langle r, s \mid r = 1, s^2 = 1, rs = sr \rangle \\
 &\cong \langle r, s \mid r = 1, s^2 = 1 \rangle \cong \langle s \mid s^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \\
 \text{(b) } n \text{ gerade:} &\cong \langle r, s \mid r^2 = 1, s^2 = 1, rs = sr \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2
 \end{aligned}$$

😊 Beide Präsentationen sind deutlich verschieden, doch beide liefern dieselbe Abelschmachung. Das ist kein Zufall, sondern eine Konsequenz von Satz L3Q: Die Abelschmachung der Präsentation $(h, k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$ präsentiert die Abelschmachung vermöge $(h', k') : \langle S \mid R' \rangle \cong G_{\text{ab}}$, und $G_{\text{ab}} = G/G'$ hängt nur von der Gruppe ab, nicht von der Präsentation.

😊 Anders gesagt: Wir rechnen in verschiedenen Koordinaten, doch das Ergebnis ist glücklicherweise koordinatenunabhängig!



Diese Rechnung hat eine schöne geometrische Interpretation.

(a) Im ungeraden Fall sind alle Spiegelungen $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ in $D_n \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^2, P_n)$ konjugiert und werden daher durch die Abelschmachung $\alpha : D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\} : s_k \mapsto -1$ identifiziert.

(b) Im geraden Fall hingegen gibt es zwei Arten von Spiegelungen: solche, deren Achse durch zwei gegenüberliegende Ecken von P_n geht, und solche, deren Achse durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten von P_n geht. Erstere sind untereinander konjugiert, auch Zweitere sind untereinander konjugiert, aber nicht Erstere mit Zweiteren. Die Abelschmachung $\alpha : D_n \twoheadrightarrow \{\pm 1\}^2$ schickt sie auf $(-1, 1)$ und $(1, -1)$.

Abelschmachung der Diedergruppe

Bemerkung: Wir betrachten speziell die Operation der Diedergruppe D_n auf den Eckpunkten des regulären Vielecks P_n und fassen so $D_n \leq S_n$ als eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe auf.

$$\begin{array}{ccc}
 S_n & \xrightarrow{\text{sign}} & \{\pm 1\} \\
 \uparrow & & \uparrow h \\
 D_n & \xrightarrow{\alpha} & \{\pm 1\}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 S_n & \xrightarrow{\text{sign}} & \{\pm 1\} \\
 \uparrow & & \uparrow \text{proj} \\
 D_n & \xrightarrow{\alpha} & \{\pm 1\}^2
 \end{array}$$

Übung: Im Falle $n = 4k + 1$ kommutiert das linke Diagramm mit $h = 1$, im Falle $n = 4k + 3$ mit $h = \text{id}$. In den Fällen $n = 4k$ und $n = 4k + 2$ kommutiert das rechte Diagramm jeweils mit geeigneter Projektion.

😊 Dieses einfache Beispiel zeigt eindrücklich: Die Abelschmachungen von Gruppe und Untergruppe können recht verschieden ausfallen!

Jede Gruppe G erlaubt unendlich viele Präsentationen $\langle S | R \rangle \cong G$.
Zum Beispiel ändern die folgenden **Tietze-Transformationen** die Präsentation (S, R) , nicht aber die präsentierte Gruppe G :

(T1) *Einfügen oder Löschen redundanter Relationen:*

$$(S, R) \leftrightarrow (S, R \sqcup R') \text{ mit } R' \subseteq \langle R^{F(S)} \rangle.$$

(T2) *Einfügen oder Löschen redundanter Erzeuger:*

$$(S, R) \leftrightarrow (S \sqcup S', R \sqcup R') \text{ mit } R' = \{s'w(s')^{-1} \mid s' \in S'\}, w : S' \rightarrow F(S).$$

😊 Besonders interessant sind endliche Präsentationen. In diesem Falle erhalten wir (T1,2) durch wiederholtes einfaches Einfügen oder Löschen. (Unendliche Präsentationen behandeln wir genauso ohne Mehraufwand.)

Beispiel: Wir haben oben $(D_n)_{\text{ab}}$ berechnet durch Abelschmachung einer Präsentation. Dabei haben wir die Tietze-Transformationen schon intuitiv richtig angewendet. Dies präzisieren wir nun formal.

Aufgabe: Vergleichen Sie die beiden Präsentationen der Diedergruppe aus Satz L3M: Wie können Sie diese ineinander transformieren?

Tietze-Transformationen

Lösung: Wir vergleichen die beiden Präsentationen aus L3M:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle s_0, s_1 \mid - \rangle & \begin{array}{c} \xrightarrow{h: s_0 \mapsto s, s_1 \mapsto rs} \\ \xleftarrow{k: s_0 \leftarrow s, s_1 s_0 \leftarrow r} \end{array} & \langle r, s \rangle \\
 \downarrow & \swarrow \quad \searrow & \downarrow \\
 G := \langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n \rangle & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{h}} \\ \xleftarrow{\bar{k}} \end{array} & \langle r, s \mid s^2, r^n, sr sr \rangle =: H
 \end{array}$$

Diese Isomorphismen übersetzen wir nun in Tietze-Transformationen:

$$\begin{aligned}
 & \langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n \rangle \\
 \cong & \langle s_0, s_1, r, s \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n, r = s_1 s_0, s = s_0 \rangle \\
 = & \langle s_0, s_1, r, s \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n, r = s_1 s_0, s = s_0, s^2, r^n, sr sr, s_0 = s, s_1 = rs \rangle \\
 = & \langle s_0, s_1, r, s \mid s^2, r^n, sr sr, s_0 = s, s_1 = rs \rangle \\
 \cong & \langle r, s \mid s^2, r^n, sr sr \rangle
 \end{aligned}$$

Satz L3s: Tietze 1908

- (1) Zwei (endliche) Präsentationen (S, R) und (S', R') stellen genau dann isomorphe Gruppen $\langle S | R \rangle \cong \langle S' | R' \rangle$ dar, wenn sie sich durch (endliche) Tietze-Transformationen ineinander überführen lassen.
- (2) Genauer gilt: Jeder Gruppenisomorphismus $(\bar{h}, \bar{k}) : \langle S | R \rangle \cong \langle S' | R' \rangle$ lässt sich durch Tietze-Transformationen erzeugen.

$$\begin{array}{ccc}
 F(S) & \xrightleftharpoons[k]{h} & F(S \sqcup S') \\
 \text{quot} \downarrow & & \downarrow \text{quot} \\
 \langle S | R \rangle & \xrightleftharpoons[\bar{k}]{\bar{h}} & \langle S \sqcup S' | R \sqcup R' \rangle
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 F(S) & \xrightleftharpoons[k]{h} & F(S') \\
 \text{quot} \downarrow & & \downarrow \text{quot} \\
 \langle S | R \rangle & \xrightleftharpoons[\bar{k}]{\bar{h}} & \langle S' | R' \rangle
 \end{array}$$

Beweis: (1) „ $\Leftarrow$ “: Für (T1) gilt $\langle (R \sqcup R')^F \rangle = \langle R^F \rangle$, also $\langle S | R \rangle = \langle S | R' \rangle$. Für (T2) gilt: Die Inklusion $h : S \hookrightarrow S \sqcup S'$ induziert $\bar{h}$. Die Retraktion $k : F(S \sqcup S') \rightarrow F(S)$ mit $s \mapsto s$ für $s \in S$ und $s' \mapsto w(s')$ für $s' \in S'$ induziert $\bar{k}$. Es gilt $k \circ h = \text{id}_{F(S)}$ und demnach ebenso $\bar{k} \circ \bar{h} = \text{id}_{\langle S | R \rangle}$.

Tietze-Transformationen

Umgekehrt gilt $h \circ k : s' \mapsto w(s') \equiv s' \pmod{R'}$, also $\bar{h} \circ \bar{k} = \text{id}_{\langle S \sqcup S' | R \sqcup R' \rangle}$. So induziert die Tietze-Transformation $(S, R) \leftrightarrow (S \sqcup S', R \sqcup R')$ den Tietze-Isomorphismus $(\bar{h}, \bar{k}) : \langle S | R \rangle \cong \langle S \sqcup S' | R \sqcup R' \rangle$.

Die Umkehrung „ $\Rightarrow$ “ folgt aus der stärkeren Aussage (2).

(2) Seien $\bar{h} : \langle S | R \rangle \cong \langle S' | R' \rangle$ und $\bar{k} : \langle S' | R' \rangle \cong \langle S | R \rangle$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. Wir heben diese hoch zu $h : F(S) \rightarrow F(S')$ und $k : F(S') \rightarrow F(S)$ auf den freien Gruppen.

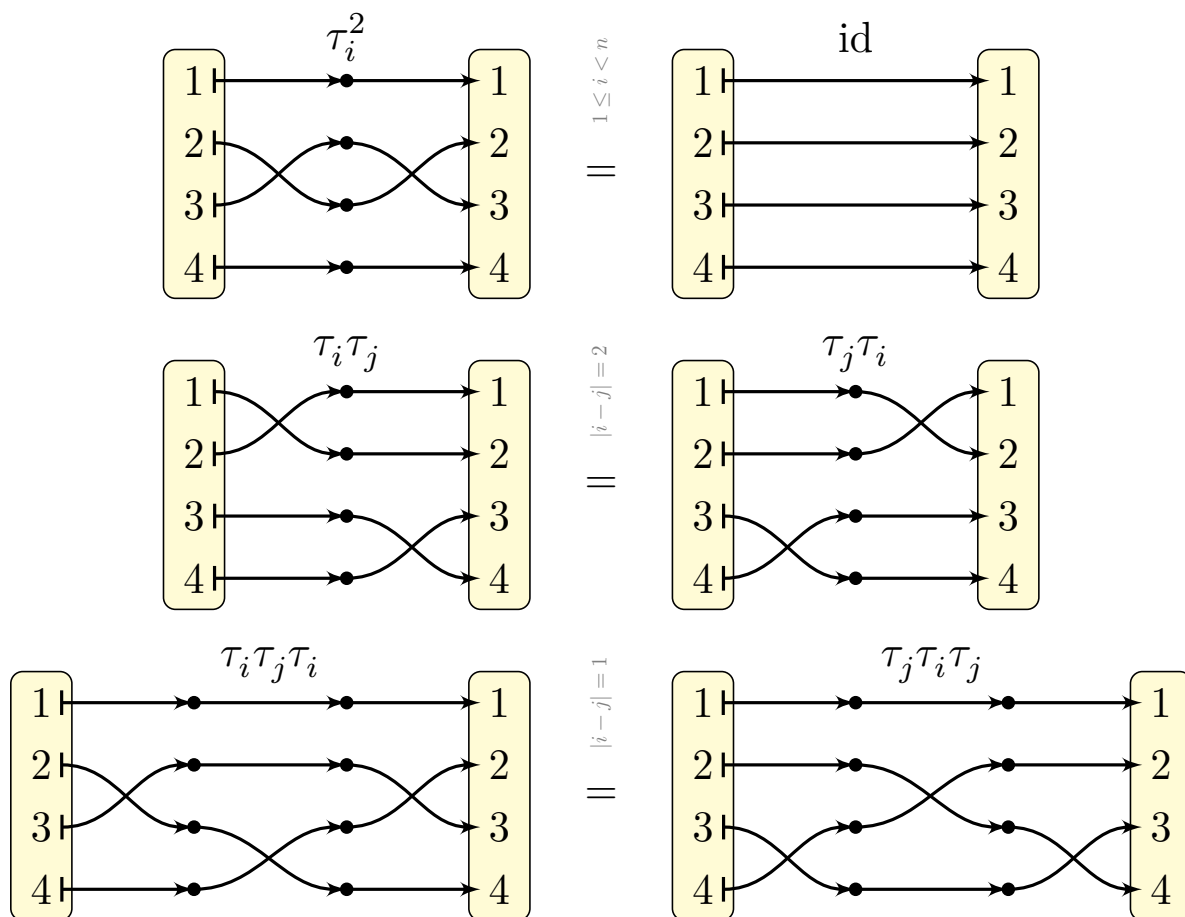
Wir können $S \cap S' = \emptyset$ annehmen. Wir betrachten dann die disjunkte Vereinigung $S^* := S \sqcup S'$ und $R^* := R \sqcup R' \sqcup R_h \sqcup R_k$ mit $R_h := \{s h(s)^{-1} \mid s \in S\}$ und $R_k := \{s' k(s')^{-1} \mid s' \in S'\}$.

Dank (T2) und (T1) erhalten wir die Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 \varphi : \langle S | R \rangle &\cong \langle S^* | R \sqcup R_k \rangle = \langle S^* | R \sqcup R_k \sqcup R' \sqcup R_h \rangle = \langle S^* | R^* \rangle, \\
 \psi : \langle S' | R' \rangle &\cong \langle S^* | R' \sqcup R_h \rangle = \langle S^* | R' \sqcup R_h \sqcup R \sqcup R_k \rangle = \langle S^* | R^* \rangle.
 \end{aligned}$$

Für diese gilt $\bar{h} = \psi^{-1} \circ \varphi$ und $\bar{k} = \varphi^{-1} \circ \psi$, wie gewünscht.

QED



Übung: Schreiben Sie diese Graphiken für $\tau_i = (i, i + 1) \in S_n$ aus als Zykel und rechnen Sie so nach, dass diese Relationen allgemein gelten.

😊 Die Relation $\tau_i^2 = \text{id}$ besagt lediglich, dass τ_i die Ordnung 2 hat. Dies gilt für jede beliebige Transposition, insbesondere auch hier.

😊 Die zweite Relation kennen Sie bereits im allgemeineren Kontext: Je zwei disjunkte Permutationen kommutieren, also auch hier.

😊 Die dritte Relation $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ für $|i - j| = 1$ ist Artins berühmte Zopfrelation; sie tritt hier natürlich für benachbarte Transpositionen auf.

Diese Relationen respektieren die Parität $\varepsilon : S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$, denn modulo 2 ist die Anzahl der Kreuzungen / Transpositionen auf beiden Seiten gleich! Das zeigt graphisch-anschaulich den Ursprung dieser Invariante.

Übung: Sei $h : (S_n, \circ, \text{id}_X) \rightarrow (A, \cdot, 1)$ ein Homomorphismus in eine abelsche Gruppe und $a = h(\tau_1) \in A$ das Bild von τ_1 . Dann gilt $a^2 = 1$ und $h(\sigma) = a^{\varepsilon(\sigma)}$ für alle $\sigma \in S_n$, dank der fundamentalen Relationen.

Jede **fundamentale Transposition** $\tau_i = (i, i+1) \in S_n$ mit $1 \leq i < n$ vertauscht zwei Nachbarn. Dabei gelten die **fundamentalen Relationen** $\tau_i^2 = 1$ und $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ für $|i-j| \geq 2$ sowie $\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ für $|i-j| = 1$.

Satz L3w: Coxeter-Präsentation der symmetrischen Gruppe

Für die symmetrische Gruppe S_n erhalten wir die Präsentation

$$S_n \cong P_n := \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \mid \begin{array}{ll} t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\tau_i \mapsto t_i$$

dank des Gruppenisomorphismus $h : P_n \xrightarrow{\sim} S_n$ mit $t_i \mapsto \tau_i$ für $1 \leq i < n$.

Präsentation beinhaltet zwei Aussagen. (1) Erzeugung: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Produkt der Fundamentaltranspositionen $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} \in S_n$.

(2) Äquivalenz: Die Relationen klären jede Mehrdeutigkeit. Genau dann ergeben zwei solche Produkte dieselbe Permutation $\sigma \in S_n$, wenn sie durch eine Folge der Fundamentalrelationen ineinander übergehen.

Anschauung: Ein Wort in den elementaren Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, das sie hier graphisch ablesen, beschreibt den Verlauf des Kartrennens. Der Rennverlauf legt das Endergebnis $\sigma \in S_n$ eindeutig fest.

Umgekehrt legt das Ergebnis σ den Rennverlauf *nicht* eindeutig fest, und den Unterschied sehen Sie hier: Er entsteht genau durch die hier gezeigten Relationen; diese führen vom einen zum anderen Verlauf.

Sie sehen also: In unserem anschaulichen Beispiel des Kartrennens steckt viel elementare, doch wunderschöne Mathematik: hier die Theorie der symmetrischen Gruppe und der elementaren Transpositionen.

😊 Das ist schön und nützlich, damit können Sie wunderbar rechnen. In Zukunft sehen Sie Rennen nie mehr mit denselben Augen, sondern können den mathematischen Kern durchschauen.

Dieser Satz lässt sich graphisch veranschaulichen und so auch beweisen! Ganz analog formuliert und beweist man Artins Präsentation der Zopfgruppe in der Knotentheorie / Geometrischen Topologie.

Beweis: (0) Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die **symmetrische Gruppe**

$$S_n = \{ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{supp}(\sigma) \subseteq \{1, \dots, n\} \},$$

$$\{\text{id}\} = S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S_4 \subseteq \dots \subseteq S_{(\mathbb{N})}.$$

Ihre Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = S_{(\mathbb{N})} := \{ \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \# \text{supp}(\sigma) < \infty \}$
ist die Gruppe aller Permutationen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit endlichem Träger.

(1) Wir betrachten die Fundamentaltransposition $\tau_i = (i, i+1)$ und

$$\zeta_{i,j} := \tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \dots \circ \tau_{j-1} = (i, i+1, \dots, j) \quad \text{mit } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Induktion über n : Jede Permutation $\sigma \in S_n$ schreibt sich eindeutig als

$$\sigma = \zeta_{i_n,n} \circ \dots \circ \zeta_{i_2,2} \circ \zeta_{i_1,1} \quad \text{mit } 1 \leq i_k \leq k \text{ für alle } k.$$

(2) Die Gruppe S_n wird erzeugt von $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. (3) Zudem folgt $\# S_n = n!$.

Die Erzeugung (2) folgt bereits aus der Existenz der Faktorisierung (1).

Die Abzählung (3) folgt aus der Bijektion $\sigma \mapsto (i_n, \dots, i_3, i_2, i_1)$, also aus der Existenz und der Eindeutigkeit der Faktorisierung (1).

(4) Der Gruppenhomomorphismus $h : P_n \rightarrow S_n$ mit $t_i \mapsto \tau_i$ für $1 \leq i < n$ existiert, denn die Fundamentalrelationen von P_n gelten in S_n .

(5) Zudem ist h surjektiv, denn S_n wird erzeugt von $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$.

Wir haben also $h : P_n \twoheadrightarrow S_n$. Knifflig ist allein die Injektivität von h :

Erzeugen die Fundamentalrelationen bereits *alle* Relationen in S_n ?

Oder müssen wir weitere, noch unerkannte Relationen befürchten?

(6) In P_n definieren wir analog zu (1) das Produkt

$$z_{i,j} := t_i \cdot t_{i+1} \cdots t_{j-1} \quad \text{mit } 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Induktion über n : Jedes Element $x \in P_n$ schreibt sich als

$$x = z_{i_n,n} \cdots z_{i_2,2} \cdot z_{i_1,1} \quad \text{mit } 1 \leq i_k \leq k \text{ für alle } k.$$

Diese Umformung gelingt allein dank der Fundamentalrelationen; dies erfordert geeignete Fallunterscheidungen und wird hier nicht ausgeführt. Schrittweise Umformung ist eine gute Übung: länglich, aber lehrreich.

(7) Aus (6) folgt $\# P_n \leq n!$. Demnach ist $h : P_n \twoheadrightarrow S_n$ bijektiv!

QED

😊 Wir Menschen sind Augenwesen. Die graphische Darstellung von Permutationen nutzen wir bisher nur zur bequemen Veranschaulichung.

😊 Im Folgenden wollen wir diese Darstellung zu einem eleganten Beweisverfahren ausbauen. Dazu müssen wir genauer erklären, wie unsere graphische Darstellung genau funktioniert.

Aufgabe: Nutzen Sie die Coxeter-Präsentation der symmetrischen Gruppe S_n und berechnen Sie damit die Abelschmachung für $n \geq 2$.

$$S_n \cong P_n \quad \tau_i \leftarrow t_i \quad := \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \left| \begin{array}{ll} t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right. \right\rangle$$

Lösung: Wir abelianisieren die Präsentation und vereinfachen:

$$\begin{aligned} (S_n)_{\text{ab}} \cong P'_n \quad [\tau_i] \leftarrow t_i &:= \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \left| \begin{array}{ll} t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für alle } i, j \\ t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \end{array} \right. \right\rangle \\ &= \left\langle t_1, \dots, t_{n-1} \left| \begin{array}{l} t_i = t_j \\ t_i^2 = 1 \end{array} \right. \right\rangle \cong \langle t \mid t^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

😊 Die Abelschmachung der Gruppe S_n ist die Signatur, siehe Satz L30. Präsentation und Abelschmachung bieten einen unabhängigen Zugang.

Abelsche Präsentationen und Invarianten

😊 Diese Rechnung ist erfreulich einfach und wunderbar effizient. Dasselbe gelingt allgemein für jede endlich präsentierte Gruppe

$$G \cong \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle.$$

Ihre Abelschmachung können wir präsentieren durch Abelschmachung der Präsentation (L3Q), durch Hinzufügen aller Kommutatorrelationen $[s_i, s_j] = 1$ zwischen den Erzeugern $s_1, \dots, s_n$:

$$G_{\text{ab}} \cong \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m, s_i s_j s_i^{-1} s_j^{-1} \text{ für alle } i, j \rangle$$

⚠ Ob die Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ abelsch ist, lässt sich aus der Präsentation (S, R) meist nicht ablesen (L-6). Für eine *abelsche* Präsentation fordern wir explizit $[S, S] \subseteq R$ als Teilmenge der gegebenen Relationen.

😊 Für abelsche Präsentationen werden das Wortproblem und das Isomorphieproblem gelöst durch die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen, also vom Gauß-Euklid-Algorithmus über $\mathbb{Z}$.

😊 Bequem nutzbar, effizient implementiert und gründlich getestet finden Sie dies zum Beispiel in GAP, <https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap47>.

Zur Illustration mache ich zwei einfache Stichproben mit GAP:

```

1 gap> F := FreeGroup( "s", "t" );;
2 gap> s := F.1;; t := F.2;;
3 gap> G := F / [ s^2, t^2, (s*t)^5 ];;
4 gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
5 [ 10, [ 2 ], "D10" ]
6
7 gap> F := FreeGroup( "r", "s" );;
8 gap> r := F.1;; s := F.2;;
9 gap> G := F / [ r^6, s^2, s*r*s*r ];;
10 gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
11 [ 12, [ 2, 2 ], "D12" ]

```

😊 GAP erkennt Gruppen: dihedral, symmetrisch, alternierend, uvm. Sie sehen hier alternative Namenskonventionen für Diedergruppen: Der Index beschreibt entweder die Eckenzahl oder die Elementzahl.

😊 Zur Sicherheit teste ich ebenso unsere Präsentation von S_4 und S_5 :

```

1 gap> F := FreeGroup( "t1", "t2", "t3" );;
2 gap> t1 := F.1;; t2 := F.2;; t3 := F.3;;
3 gap> G := F / [ t1^2, t2^2, t3^2, (t1*t2)^3, (t1*t3)^2, (t2*t3)^3 ];;
4 gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
5 [ 24, [ 2 ], "S4" ]
6
7 gap> F := FreeGroup( "t1", "t2", "t3", "t4" );;
8 gap> t1 := F.1;; t2 := F.2;; t3 := F.3;; t4 := F.4;;
9 gap> G := F / [ t1^2, t2^2, t3^2, t4^2, (t1*t2)^3, (t1*t3)^2, (t1*t4)^2, (t2*t3)^3, (t2*t4)^2, (t3*t4)^3 ];;
10 gap> [ Size(G), AbelianInvariants(G), StructureDescription(G) ];
11 [ 120, [ 2 ], "S5" ]

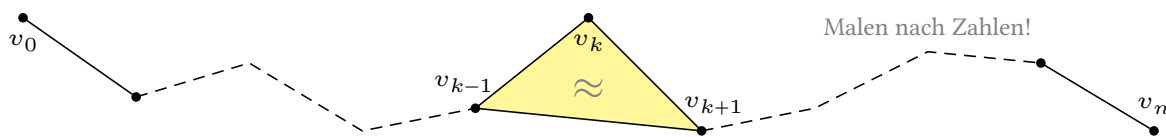
```

Diese Abzählung zeigt erneut, dass unsere Relationen vollständig sind: Der Gruppenhomomorphismus $h : P_n \rightarrow S_n : t_i \mapsto \tau_i$ ist wohldefiniert, da die Relationen in S_n gelten, und surjektiv, da $S_n = \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \rangle$. Mit $\#P_n \leq \#S_n < \infty$ folgt, dass h bijektiv ist, also ein Isomorphismus.





Wir nutzen Polygonzüge und polygonale Homotopie siehe J1A/L4A.



Sei $V = \mathbb{R}^d$ oder allgemeiner ein Vektorraum V , normiert oder lokal-konvex. Zu jedem Raum $X \subseteq V$, etwa offen oder ein Polyeder, definieren wir das **polygonale Fundamentalgruppoid** als Quotient

$$\Pi^{\text{pl}}(X) := P^{\text{pl}}(X)/\approx = \frac{\{\text{Polygonzüge } w = v_0 v_1 \dots v_n \text{ in } X\}}{\text{polygonale Homotopie } \approx \text{ in } X}$$

mit der Verknüpfung $[w] \cdot [w'] = [w * w']$ durch Aneinanderhängen von Polygonzügen. Für jeden Punkt $x_0 \in X \subseteq V$ definieren wir so die **polygonale Fundamentalgruppe**:

$$\pi_1^{\text{pl}}(X, x_0) := \Pi^{\text{pl}}(X, x_0, x_0) = \frac{\{\text{geschlossene Polygonzüge in } (X, x_0)\}}{\text{polygonale Homotopie } \approx \text{ in } (X, x_0)}$$

Vereinfachung zur polygonalen Fundamentalgruppe

L402

Satz L4B: polygonale Fundamentalgruppe

Sei X offen in $\mathbb{R}^d$ oder allgemein in einem Vektorraum V , normiert oder lokal-konvex. Dann haben wir den Gruppoidisomorphismus

$$\varphi : \Pi^{\text{pl}}(X) \xrightarrow{\sim} \Pi(X) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Für jeden Fußpunkt $x_0 \in X$ induziert dies den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \pi_1^{\text{pl}}(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Beweis: Triangulierung (I3T) und simpliziale Approximation (I4J). QED

😊 Wir haben also zwei äquivalente Sichtweisen:

$$\pi_1(X, x_0) := \frac{\{\text{Schleifen in } (X, x_0)\}}{\text{Homotopie in } (X, x_0)} \cong$$

$$\pi_1^{\text{pl}}(X, x_0) := \frac{\{\text{polygonale Schleifen in } (X, x_0)\}}{\text{polygonale Homotopie in } (X, x_0)}$$

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist für *jeden* topologischen Raum (X, x_0) definiert (L2A), denn sie beruht allein auf stetigen Abbildungen, nämlich Wegen $[0, 1] \rightarrow X$ modulo Homotopien $[0, 1]^2 \rightarrow X$. Dies macht sie zu einem universellen Werkzeug $\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$, siehe L2D und L2G.

Bislang konnten wir jedoch nur sehr einfache Beispiele konkret ausrechnen, etwa sternförmige oder zusammenziehbare Räume (L2s) oder Sphären $\mathbb{S}^n$ (L2U). Das erste nicht-triviale Beispiel ist die Umlaufzahl $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$. Wir wollen diese Beispiele und noch viel mehr!

Wenn X ein „schöner“ Raum ist, etwa eine offene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ oder eine Mannigfaltigkeit, ein Simplicialkomplex oder ein Zellkomplex, dann nutzen wir die zusätzliche Struktur gerne und betrachten geschickt nur noch schöne Wege und schöne Homotopien betrachten.

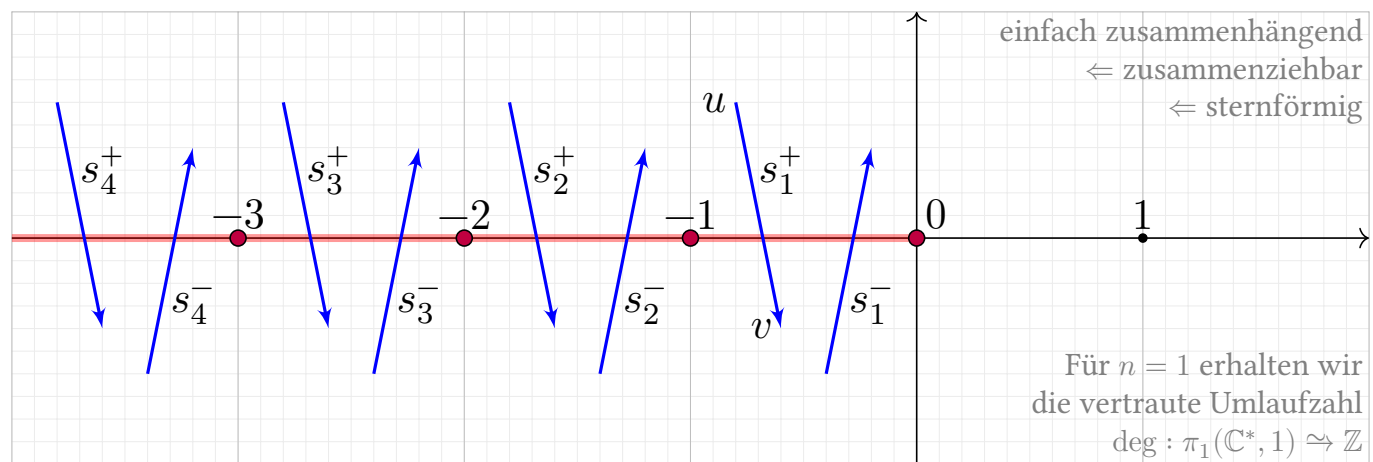
Für $X \subseteq V$ offen haben wir zudem das polygonale Fundamentalgruppoid $\Pi^{\text{pl}}(X)$ und hiermit $\pi_0^{\text{pl}}(X)$ und $\pi_1^{\text{pl}}(X, x_0)$. Diese sind isomorph zur topologischen Variante, bieten aber zwei spürbare, wichtige Vorteile: Sie sind anschaulicher und erlauben explizite Berechnungen.

⚠ Stetige Abbildungen $[0, 1] \rightarrow X$ sind ungeheuer allgemein und können zum Beispiel raumfüllend sein, siehe C6H. Naiv-intuitiv jedoch stellen wir uns Wege eher polygonal oder stückweise glatt vor. Satz L4B rechtfertigt diese intuitive Vorstellung: Dank Kompaktheit von $[0, 1]^n$ und Offenheit von $X \subseteq V$ können wir lokal die lineare Struktur nutzen.

🧐 Warum haben wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ nicht gleich polygonal definiert? Erstens lässt sich nicht jeder Raum als offene Menge $X \subseteq V$ einbetten. Zweitens werden stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ unsere Polygonzüge meist nicht in Polygonzüge abbilden. Um das zu erreichen, müssten wir unsere Räume und Abbildungen drakonisch einschränken, und damit auch die Anwendbarkeit unseres Werkzeugs.

😊 Wir trennen daher wie üblich die allgemeine *Definition* und die konkrete *Berechnung*: Da wir den Funktor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ für *alle* topologischen Räume und *alle* stetigen Abbildungen nutzen wollen, legen wir Definition L2A zugrunde. Für konkrete Berechnungen nutzen wir dankend jede zweckdienliche Zusatzinformation, hier Satz L4B.

Fundamentalgruppe der n -fach gelochten Ebene



Satz L4D: Fundamentalgruppe der n -fach gelochten Ebene

Die Fundamentalgruppe der n -fach gelochten Ebene

$$X = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots, 1 - n\}$$

ist frei vom Rang n . Genauer haben wir $(\psi, \varphi) : \pi_1(X, 1) \cong F_n$ mit $\psi : \pi_1(X, 1) \simeq F_n := \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle$ wie in obiger Abbildung und $\varphi : F_n \simeq \pi_1(X, 1) : s_k \mapsto [v_0 v_k^+ v_k^- v_0]$ mit $v_0 = 1$ und $v_k^\pm = 1/2 - k \pm i$.

Fundamentalgruppe der gelochten Ebene

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:

$$\begin{array}{ccc}
 P^{\text{pl}}(X, 1, 1) & \xrightleftharpoons[\omega]{\eta} & [s_1^\pm, \dots, s_n^\pm \mid -] =: E_n \\
 \downarrow p & \swarrow \bar{\eta} \quad \searrow \bar{\omega} & \downarrow q \\
 \text{Polygonzüge in } (X, 1) & & \text{Wörter über } s_1^\pm, \dots, s_n^\pm \\
 \text{polygonale Homotopie} & & \text{Kürzungsrelationen} \\
 \pi_1^{\text{pl}}(X, 1) & \xrightleftharpoons[\varphi]{\psi} & \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle := F_n
 \end{array}$$

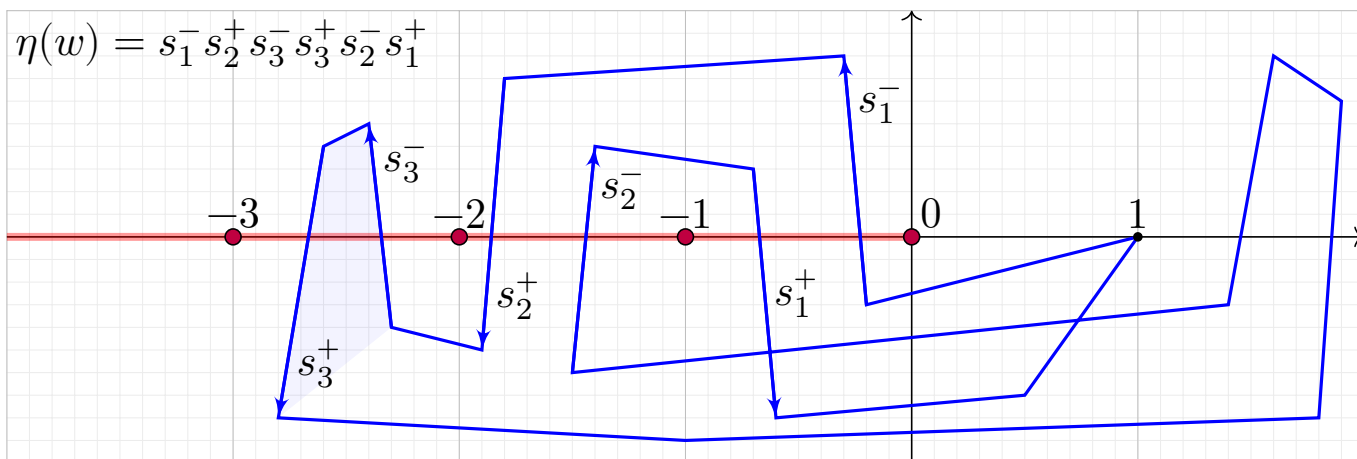
Aufgabe: (a) Die Homomorphismen ψ und φ sind wohldefiniert.

Für ψ folgt dies aus der Invarianz unter elementaren Homotopien.

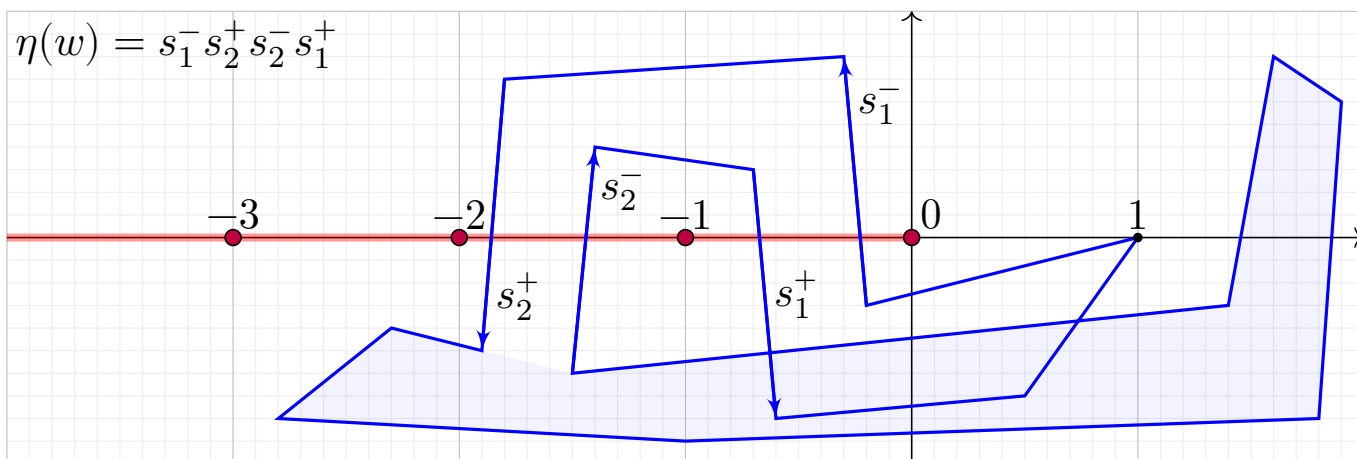
(b) Die Konstruktion garantiert $\psi \circ \varphi = \text{id}_{F_n}$, also ist ψ surjektiv.

(c) Zur Injektivität von ψ zeigen wir $\text{Ker } \psi = \{1\}$. Sei $w = v_0 v_1 \dots v_\ell$ ein Polygonzug in $(X, 1)$ mit $\psi([w]) = 1$. Wir konstruieren eine Homotopie $w \approx v_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Achsübergänge, parallel zur Kürzung des Wortes $\eta(w)$ im freien Monoid $[s_1^\pm, \dots, s_n^\pm \mid -]$.

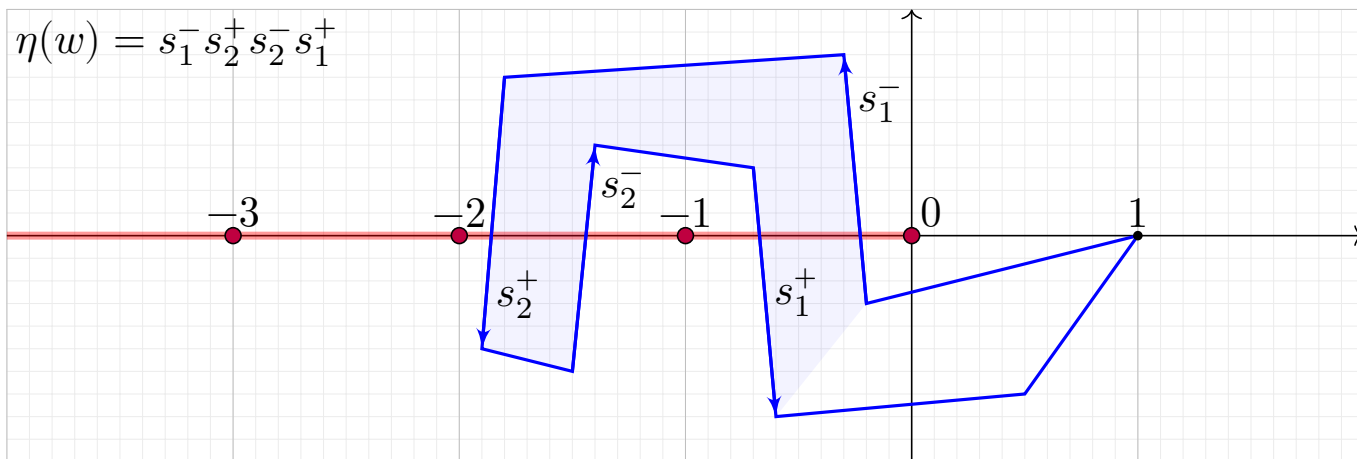
$$\eta(w) = s_1^- s_2^+ s_3^- s_3^+ s_2^- s_1^+$$



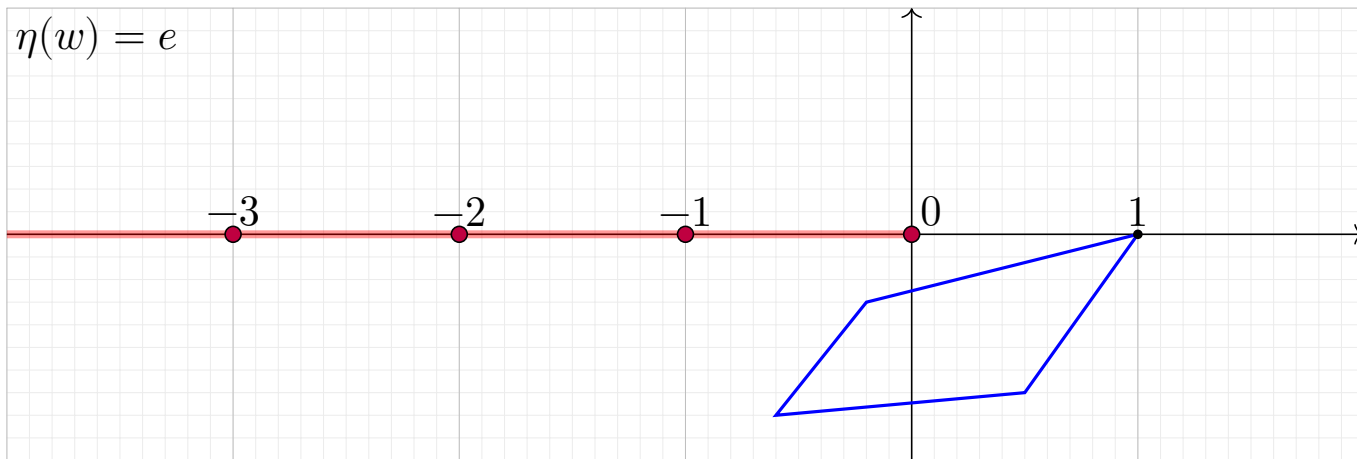
$$\eta(w) = s_1^- s_2^+ s_2^- s_1^+$$

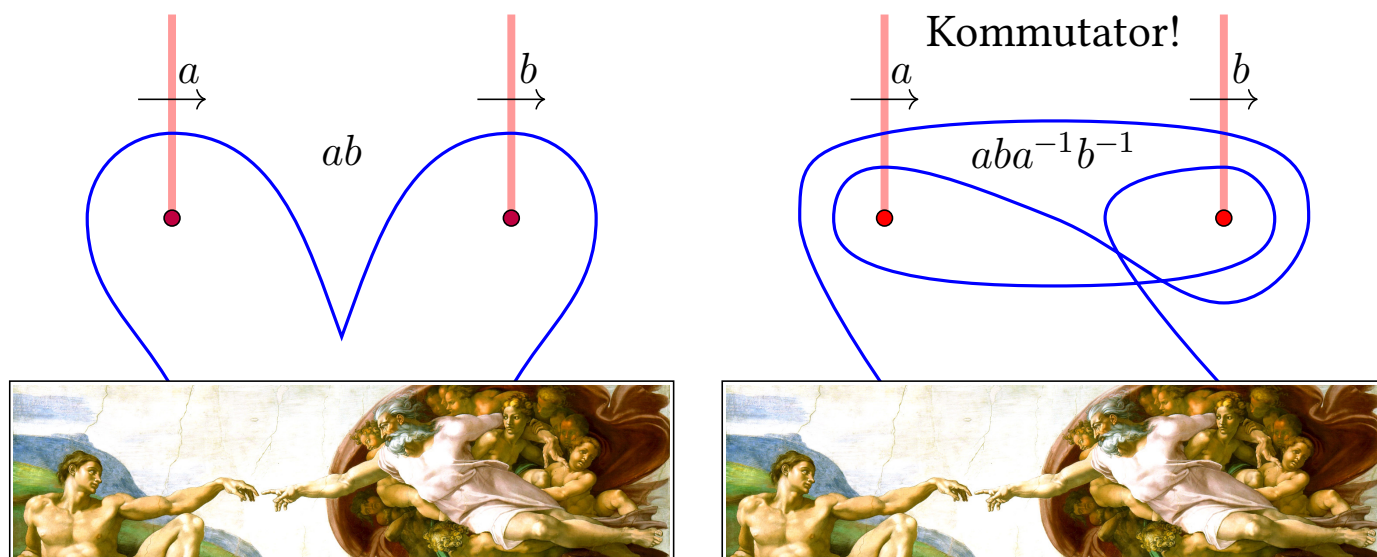


$$\eta(w) = s_1^- s_2^+ s_2^- s_1^+$$



$$\eta(w) = e$$

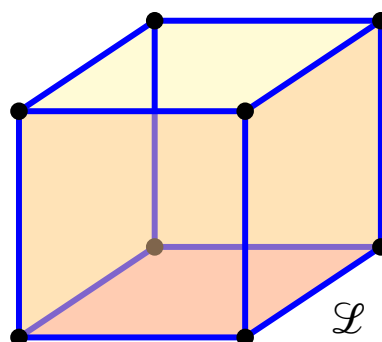
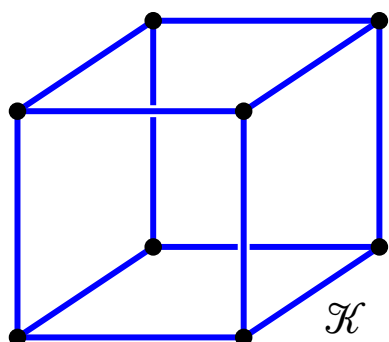




Aufgabe: In einer Wand stecken $n \geq 1$ Nägel. Können Sie hieran ein Bild an einer Schnur aufhängen, sodass das Bild hält, aber beim Ziehen eines beliebigen Nagels fällt? Für $n = 1$ ist das trivial. Für $n = 2$ hilft uns der Kommutator. für $n \geq 3$ iterieren wir Kommutatoren. Können Sie noch Schnur sparen und die Länge quadratisch in n beschränken?

Mutig durch Wände gehen!

😊 Diese Technik lässt sich weitreichend verallgemeinern, das kostet kaum Mehraufwand, und die Anwendungen sind spektakulär!
Ein Trick, der zweimal funktioniert, ist eine Methode.



Aufgabe: Sei $\mathcal{K}$ das 1-Skelett des Würfels $W = [-1, 1]^3$. Präsentieren Sie $\pi_1(X, x_0)$ für das Komplement $X = \mathbb{R}^3 \setminus |\mathcal{K}|$ mit Fußpunkt $x_0 = (2, 0, 0)$.

Lösung: Wir wählen *fünf* der sechs Facetten, koorientieren jede davon (z.B. aus W heraus) und erhalten $(\psi, \varphi) : \pi_1(X, x_0) \cong \langle s_1, \dots, s_5 \mid - \rangle$ wie im vorigen Satz und Beweis. Diese einfache doch wirkungsvolle Technik wollen wir nun ausformulieren, möglichst präzise und gebrauchsfertig!

Wir zählen Wanddurchgänge.

In $\mathbb{R}^n$ seien $\mathcal{L} \geq \mathcal{K}$ Polytopalkomplexe, lokal-endlich, mit $\mathcal{L} \setminus \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}_{<n}$. Wir nennen $P \in \mathcal{L}_{n-1} \setminus \mathcal{K}$ eine **Wand**. Senkrecht auf P stehen $\pm u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Jedes Paar $s^\pm = (P, \pm u)$ ist eine **koorientierte Wand**. Wir definieren

$$S := \mathcal{L}_{n-1} \setminus \mathcal{K} \quad \text{und} \quad S^\pm := \{ (P, u) \mid P \in S, u \in \mathbb{S}^{n-1}, P \perp u \}.$$

Wir definieren das freie Monoid $E = [S^\pm \mid -]$ und die freie Gruppe

$$F = \langle S \mid - \rangle := [S^\pm \mid s^+ s^- = 1 : s \in S].$$

Für jede Kante $[v_0, v_1] \subseteq X$ zählen wir den Wanddurchgang durch

$$\eta(v_0 v_1) := \begin{cases} 1 & \text{falls } [v_0, v_1] \cap |\mathcal{L}| = \emptyset, \\ (P, u) & \text{falls } [v_0, v_1] \cap P \neq \emptyset \text{ und } \langle u, v_1 - v_0 \rangle > 0. \end{cases}$$

Jedem Polygonzug $w = v_0 v_1 \dots v_\ell$ in $\mathbb{C}^*$ ordnen wir das Produkt zu,

$$\eta(w) := \eta(v_0 v_1) \cdots \eta(v_{\ell-1} v_\ell) \in E$$

Jede Kante schneide höchstens eine Wand, und dies transvers.

Die freie Wirtinger-Präsentation

Satz L4D: Wirtinger-Präsentation, zunächst frei

In $\mathbb{R}^n$ seien $\mathcal{L} \geq \mathcal{K}$ Polytopalkomplexe und lokal-endlich.

Die Differenz $S := \mathcal{L} \setminus \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}_{n-1}$ bestehe nur aus Wänden.

Das Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{L}|$ sei einfach zusammenhängend.

Dann ist die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{K}|$ frei, explizit gilt

$$(\psi, \varphi) : \pi_1(X, x_0) \cong \langle S \rangle := [S^\pm \mid s^+ s^- = 1 : s \in S].$$

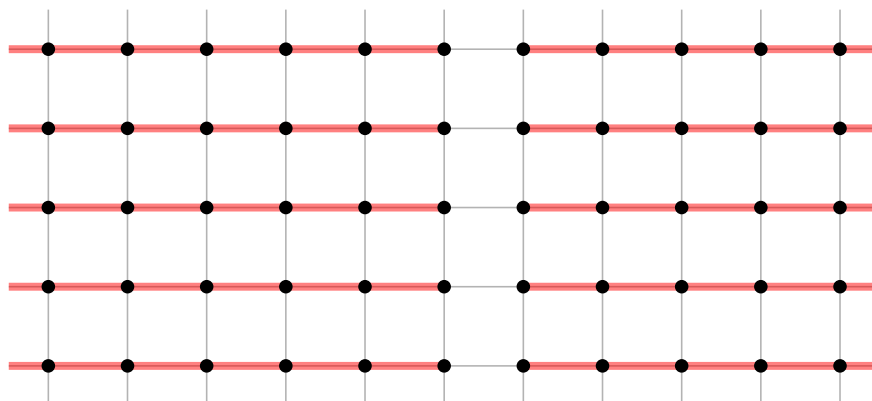
😊 Der Beweis ist derselbe wie von Satz L4D zur gelochten Ebene.

Beweis: (a) Die Abbildung $\psi : \pi_1^{\text{pl}}(X, x_0) \rightarrow \langle S \rangle$ mit $\psi([w]) = [\eta(w)]$ ist wohldefiniert, da invariant unter elementaren Homotopien von w .

(b) Umgekehrt konstruieren wir $\varphi([s^\pm]) = [w_s^\pm]$ mit Wanddurchgang $\eta(w_s^\pm) = s^\pm$. Demnach ist ψ surjektiv, denn wir haben $\psi \circ \varphi = \text{id}_{F_n}$.

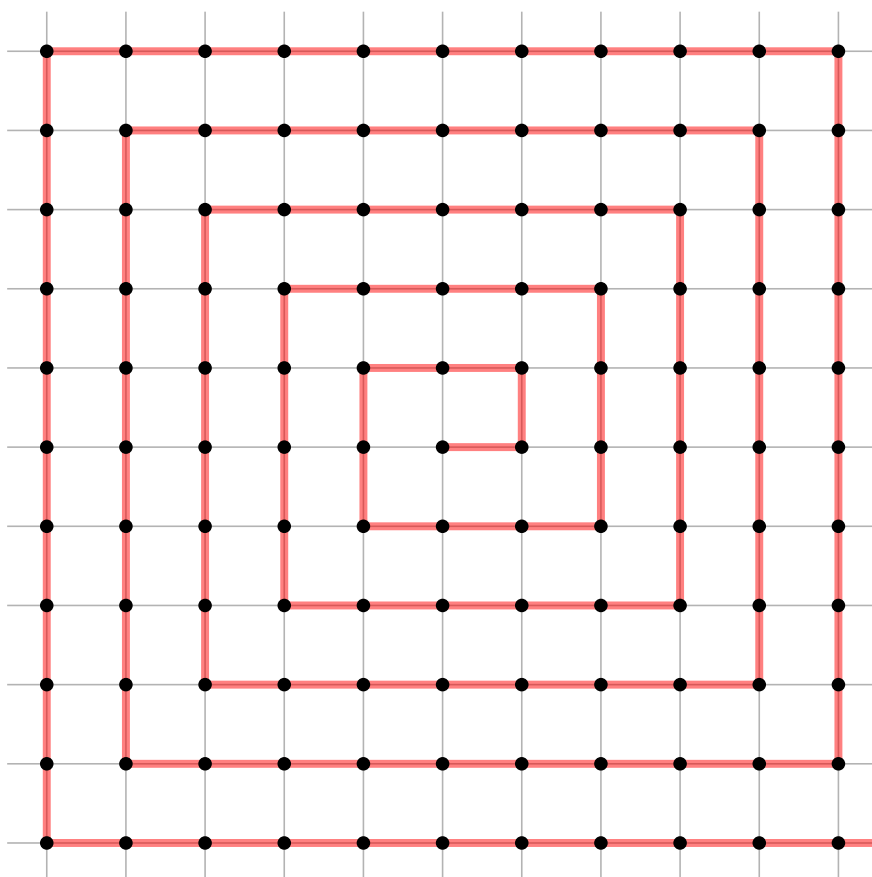
(c) Zur Injektivität von ψ zeigen wir $\text{Ker } \psi = \{1\}$. Sei $w = v_0 v_1 \dots v_\ell$ ein Polygonzug in (X, x_0) mit $\psi([w]) = 1$. Wir konstruieren eine Homotopie $w \approx x_0$ parallel zur Kürzung des Wortes $\eta(w)$ im Monoid $[S^\pm \mid -]$. QED

Aufgabe: Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n, *)$ für $n \geq 2$, möglichst explizit.



Lösung: Wir ordnen jedem Punkt $x \in \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kante s_x zu, wie oben $s_x = [x, x - e_1]$ für $x_1 \leq 0$ und $s_x = [x, x + e_1]$ für $x_1 > 0$. Wir erhalten so die SKomplexe $\mathcal{L} \geq \mathcal{K}$ mit $\mathcal{K} = \{\emptyset\} \cup \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$ und $\mathcal{L} = \mathcal{K} \cup \{s_x \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$. Das Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{L}|$ ist zsziehbar, sogar affin vermöge $\{(1/2, 0)\} \xrightarrow{\sim} \{1/2\} \times \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$. Für das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{K}|$ finden wir dank L4D $\pi_1(X, *) \cong \langle s_z \mid z \in \mathbb{Z}^2 \rangle$ für $n = 2$; für $n \geq 3$ folgt $\pi_1(X, *) = \{1\}$, da keine Wände vorliegen.

Die Wahl von $\mathcal{L} \geq \mathcal{K}$ lässt viel Raum für kreative Ideen.



Korollar L4E: gelochte euklidische Räume

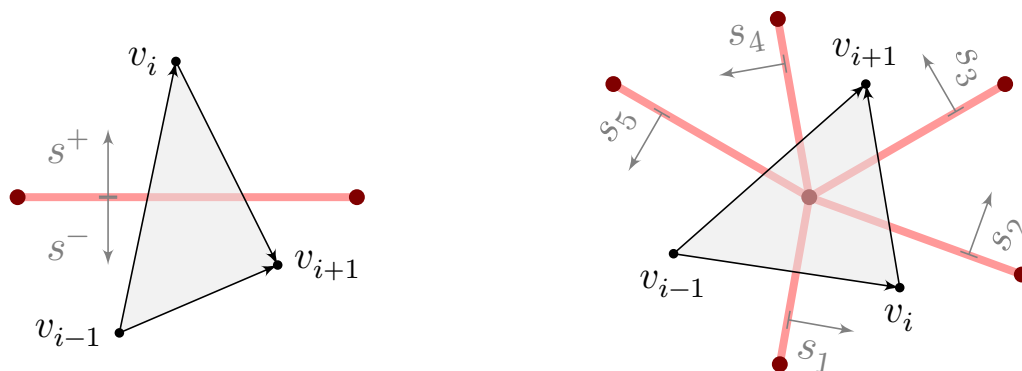
- (1) Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ diskret und abgeschlossen. Für das Komplement $X = \mathbb{C} \setminus A$ und $x_0 \in X$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ frei über $|A|$ Erzeugern.
- (2) Für $n \geq 3$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diskret und abgeschlossen ist das Komplement $X = \mathbb{R}^n \setminus A$ einfach zusammenhängend.

Beweis: (1) Die Menge $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ist abzählbar dank D6J. Dank Homogenität K1z konstruieren wir einen Homöomorphismus $h : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ mit $x_0 \mapsto 1$ und $a_k \mapsto -k$ für $k = 0, 1, 2, \dots$. Dank L2E genügt es also, den Spezialfall $A \subseteq -\mathbb{N}$ zu betrachten. Wie im vorigen Satz L4D konstruieren wir dann wunderbar explizit einen Gruppenisomorphismus $\psi : \pi_1(\mathbb{C} \setminus A, 1) \xrightarrow{\sim} \langle s_1, s_2, s_3, \dots \mid - \rangle$.

(2) Wie in (1) konstruieren wir $h : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ mit $h(A) \subseteq (-\mathbb{N}) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Wie in der vorigen Aufgabe folgt $\pi_0(X) = \{X\}$ und $\pi_1(X, e_1) = \{1\}$. QED

Wirtinger-Präsentation

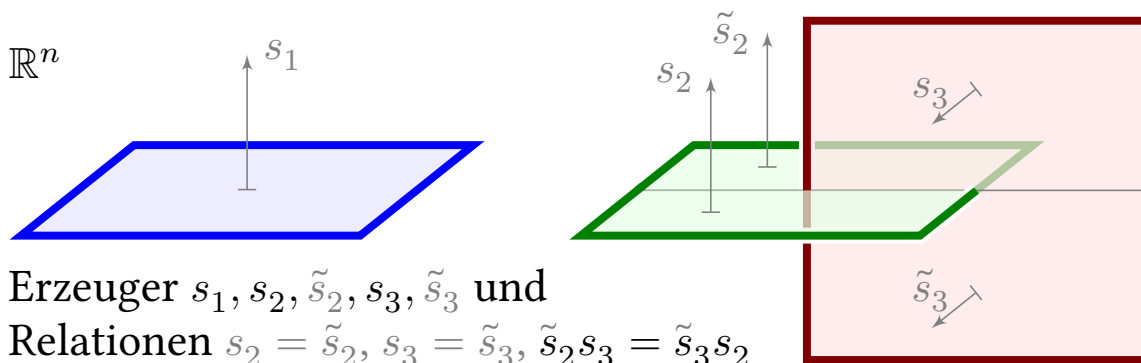
Eine **Wand** ist ein Polytop $P \in \mathcal{L}_{n-1} \setminus \mathcal{K} =: S$, der Kodimension 1, und definiert zwei **koorientierte Wände** $s^\pm = (P, \pm u)$ mit $u \in P^\perp \cap \mathbb{S}^{n-1}$. Bei elementaren Homotopien finden wir folgende Situationen:



Ein **Grat** ist ein Polytop $Q \in \mathcal{L}_{n-2} \setminus \mathcal{K}$, der Kodimension 2. Hierzu seien $s_1^\pm, s_2^\pm, \dots, s_k^\pm \in S$ die Wände, die Q enthalten, zyklisch angeordnet und koorientiert in einer Ebene orthogonal zu Q . Dies definiert die Relation $r_Q : s_1 s_2 \cdots s_k = 1$. So erhalten wir alle benötigten Relationen:

$$R := \{(s^+ s^-, 1) \mid s \in S\} \cup \{r_Q \mid Q \in \mathcal{L}_{n-2} \setminus \mathcal{K}\}$$

Wirtinger-Präsentation



Satz L4M: Wirtinger-Präsentation

In $\mathbb{R}^n$ seien $\mathcal{L} \geq \mathcal{K}$ lokal-endliche Polytopalkomplexe mit $\mathcal{L} \setminus \mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}_{<n}$. Das Komplement $Y = \mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{L}|$ sei einfach zusammenhängend.

Dies präsentiert die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{R}^n \setminus |\mathcal{K}|$ durch

$$(\psi, \varphi) : \pi_1(X, x_0) \cong [S^\pm : \text{Wände} \mid R : \text{Grate}]$$

Merkregel: Die Wände $P \in \mathcal{L}_{n-1} \setminus \mathcal{K}$ liefern die Erzeuger $S^\pm$, und die Grate $Q \in \mathcal{L}_{n-2} \setminus \mathcal{K}$ liefern die Relatoren $R \subseteq (S^\pm)^*$ wie oben erklärt.

Beweis: (a) In $\mathbb{R}^n$ sind $|\mathcal{L}|$ und $|\mathcal{K}|$ abgeschlossen, also Y und X offen. Um jeden Polygonzug $P = v_0 v_1 \dots v_{\ell-1} v_\ell$ haben wir Spielraum: Dank Kompaktheit von $|P|$ haben wir $\varepsilon := \text{dist}(|P|, |\mathcal{K}|) > 0$. Wenn wir jeden Eckpunkt v_i verschieben zu $v'_i \in B(v_i, \varepsilon)$, so verläuft $P' = v_0 v'_1 \dots v'_{\ell-1} v_\ell$ immer noch in X , und beide sind äquivalent, d.h. es gilt $P \approx P'$ in X .

(b) Dasselbe gilt für jede Folge von Δ -Zügen $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_k$: Auch hier gibt es einen Abstand $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass wir innere Eckpunkte um δ verschieben dürfen, und dabei die Umformung in X erhalten bleibt.

Daher dürfen wir im Folgenden vereinfachend annehmen:

(c) Jede Kante schneidet höchstens eine Wand, und dies transvers.

(d) Jeder Δ -Zug schneidet höchstens einen Grad, und dies transvers.

Zwei Polytope P und Q in $\mathbb{R}^n$ sind transvers, wenn sie disjunkt sind oder sich in genau einem Punkt $a \in \text{Int } P \cap \text{Int } Q$ schneiden und zwar (affin-) linear unabhängig gemäß $\mathbb{R}^n = T_a P \oplus T_a Q$: Basen von $T_a P = \langle P - a \rangle_{\mathbb{R}}$ und $T_a Q = \langle Q - a \rangle_{\mathbb{R}}$ fügen sich zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$.

Wirtinger-Präsentation

(e) Die Abbildung $\psi : \pi_1^{\text{pl}}(X, x_0) \rightarrow [S^\pm | R]$ mit $\psi([w]) = [\eta(w)]$ ist wohldefiniert: Aus Homotopie $w \approx w'$ wird Kongruenz $\eta(w) \equiv \eta(w')$.

(f) Umgekehrt konstruieren wir $\varphi([s^\pm]) = [w_s^\pm]$ mit Wanddurchgang $\eta(w_s^\pm) = s^\pm$: Jede Relation in R übersetzt sich in eine Homotopie.

(g) Demnach ist ψ surjektiv, denn nach Konstruktion gilt $\psi \circ \varphi = \text{id}_{F_n}$.

(h) Wir betrachten schließlich $\varphi \circ \psi : w \mapsto \eta(w) \mapsto w'$. Die Polygonzüge w und w' durchstoßen dieselben Wände. Jede Wand ist zshgd, daher können wir die Durchstoßungen angleichen. Das Komplement Y ist einfach zshgd, das zeigt $w \approx w'$. Das bedeutet $\varphi \circ \psi : [w] \mapsto [w]$, also $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\pi_1}$. QED

😊 Wir sehen hier dreimal denselben Beweis, der sich vor unseren Augen in vollendeter Schönheit und erfreulicher Allgemeinheit entfaltet.

Zur Vorbereitung (a–d) nutzen wir unsere topologischen Werkzeuge und bringen polygonale Wege und Homotopien in *allgemeine Lage*.

In (e–h) übersetzen wir die topologischen Daten in algebraische Daten und verlustfrei zurück: Wir erhalten einen Gruppenisomorphismus!

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:

$$\begin{array}{ccc}
 P^{\text{pl}}(X, x_0, x_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta} \\ \xleftarrow[\omega]{\approx} \end{array} & [S | -] =: E \\
 \downarrow p \quad \begin{array}{l} \text{Polygonzüge in } (X, x_0) \\ \text{polygonale Homotopie} \end{array} & \begin{array}{c} \nwarrow \bar{\eta} \quad \nearrow \bar{\omega} \\ \searrow \psi \quad \swarrow \varphi \end{array} & \downarrow q \quad \begin{array}{l} \text{Wörter über } S \\ \text{Relationen } R \end{array} \\
 \pi_1^{\text{pl}}(X, x_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow[\varphi]{\psi} \\ \xleftarrow[\cong]{\cong} \end{array} & [S | R] := G
 \end{array}$$

Aufgabe: Führen Sie diese Konstruktion detailliert aus:

Die Homomorphismen (e) ψ und (f) φ sind wohldefiniert, denn die im Start geforderten Relationen sind auch im Ziel erfüllt.

Nach Konstruktion gilt (g) $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$ und (h) $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Versuchen Sie es unbedingt selbst. Sie können hier viel lernen, denn viele Isomorphismen entstehen genau so! Ich führe dies für Sie vorbildlich aus.

Beweis: (e) Wir haben den Monoidhomomorphismus (von Seite L411)

$$\eta : P^{\text{pl}}(X, x_0, x_0) \rightarrow [S | -].$$

Wir nehmen hierzu Transversalität (c) für alle Polygonzüge an.

Ebenso nutzen wir Transversalität (d) für polygonale Homotopie:

Jede elementare Homotopie links in X wird rechts zu einer Relation in R .

Somit induziert $\bar{\eta} = q \circ \eta$ den Gruppenhomomorphismus

$$\psi : \pi_1^{\text{pl}}(X, x_0) \rightarrow G : \psi([w]) = [\eta(w)].$$

(f) Zur Wand $s = (P, u)$ sei x_P der Schwerpunkt und $v_s^\pm = x_P \pm \varepsilon u \in Y$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass die Kante $v_s^- v_s^+$ nur die Wand P trifft. Zu jedem $a \in Y$ sei $w(a)$ ein Polygonzug in Y von x_0 nach a . Speziell für $a = x_0$ wählen wir $w(a) = x_0$ konstant. So erhalten wir den Monoidhomomorphismus

$$\omega : [S | -] \rightarrow P^{\text{pl}}(X, x_0, x_0) : s \mapsto w_s := w(v_s^-) * v_s^- v_s^+ * \bar{w}(v_s^+).$$

Jede Relation aus R übersetzt sich in eine simpliziale Homotopie in X :

(1) Aus s^+s^- wird $w(v_s^-) * v_s^- v_s^+ * \bar{w}(v_s^+) * w(v_s^+) * v_s^+ v_s^- * \bar{w}(v_s^-) \approx x_0$.

(2) Sei $Q \in \mathcal{L}_{n-2} \setminus \mathcal{K}$ ein Grat. Die zugehörige Relation $r_Q : s_1 \cdots s_k = 1$ wird zu $w(v_{s_1}^-) * v_{s_1}^- v_{s_1}^+ * \bar{w}(v_{s_1}^+) * \cdots * w(v_{s_k}^-) * v_{s_k}^- v_{s_k}^+ * \bar{w}(v_{s_k}^+) \approx x_0$.

Nach Kürzung entspricht dies einem kompletten Umlauf um Q .

So erhalten wir die behauptete polygonale Homotopie in X .

Somit induziert $\bar{\omega} = p \circ \omega$ den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : [S | R] \rightarrow \pi_1(X, x_0) : [s] \mapsto [w_s].$$

(g) Wir zeigen $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$. Unsere Konstruktion garantiert:

$$\eta \circ \omega : s \mapsto w_s = w(v_s^-) * v_s^- v_s^+ * \bar{w}(v_s^+) \mapsto s$$

Hier gilt wirklich Gleichheit $(\eta \circ \omega)(s) = s$, also $\eta \circ \omega = \text{id}_E$.

Das bedeutet $\psi \circ \varphi : [s] \mapsto [w_s] \mapsto [s]$, also $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$.

(h) Wir zeigen $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$. Für jeden Polygonzug w in (X, x_0) gilt:

$$\begin{aligned} \omega \circ \eta : w &\approx w_0 v_{s_1}^- v_{s_1}^+ w_1 \cdots v_{s_k}^- v_{s_k}^+ w_k \mapsto s_1 \cdots s_k \\ &\mapsto w(s_1^-) * s_1^- s_1^+ * \bar{w}(s_1^+) * \cdots * w(s_k^-) * s_k^- s_k^+ * \bar{w}(s_k^+) \approx w \end{aligned}$$

Als Homotopie in X können wir jeden Wanddurchgang von w zur Standardform $v_{s_i}^- v_{s_i}^+$ verschieben: Jede Wand ist konvex, also wegzshgd.

Die Polygonzüge $w_0, w_1, \dots, w_k$ verlaufen im einfach zshgden Raum Y .

Demnach gilt $w_0 \approx w(s_1^-)$ und $w_1 \approx \bar{w}(s_1^+) w(s_2^-)$ und ... $w_k \approx \bar{w}(s_k^+)$.

Das liefert uns eine polygonale Homotopie $(\omega \circ \eta)(w) \approx w$ in X .

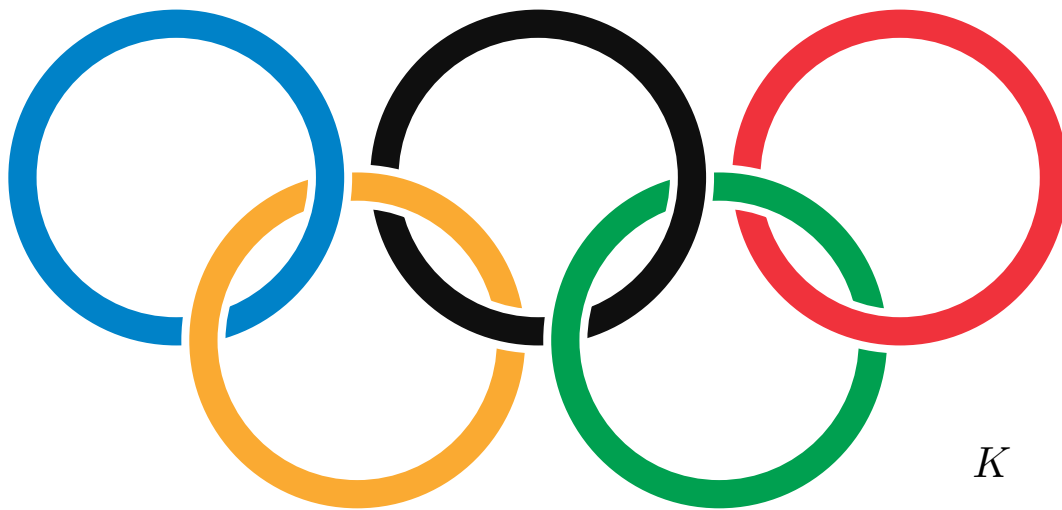
Das bedeutet $\varphi \circ \psi : [w] \mapsto [w]$, also $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

Wie behauptet ist (ψ, φ) ein Gruppenisomorphismuspaar.

QED

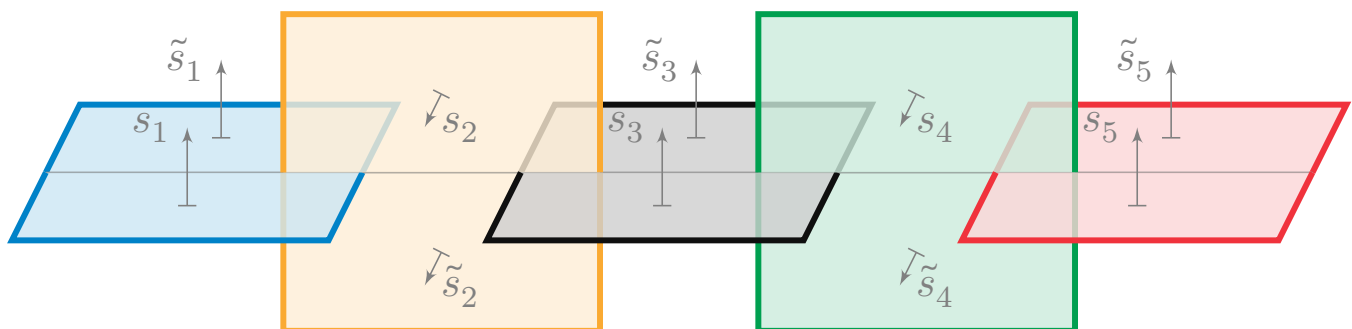
😊 Satz und Beweis sind idealtypisch für Isomorphie. Bitte gehen Sie alles sorgsam durch, dann formulieren Sie es noch einmal selbst.

Kaum macht man es richtig, schon funktioniert's!



Aufgabe: Berechnen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0)$ des Komplements der oben gezeigten olympischen Ringe $K \subseteq \mathbb{R}^3$.

Not so fun fact: Das berühmte Olympiaschutzgesetz (OlympSchG) stellt das olympische Emblem unter alleinige Verfügungsgewalt des IOC/NOK. Ist diese Vorlesung illegal? Gilt die Freiheit der Lehre? (GG Art. 5.3.1) Gefährde ich damit zukünftige deutsche Olympiabewerbungen?



Lösung: Wir stellen die Ringe polytopal dar durch $\mathcal{K}$ und füllen $\mathcal{K}$ durch Wände zu $\mathcal{L}$ wie skizziert, so dass $\mathbb{R}^3 \setminus |\mathcal{L}|$ einfach zusammenhängt. Dank Wirtinger L4M können wir bequem eine Präsentation ablesen:

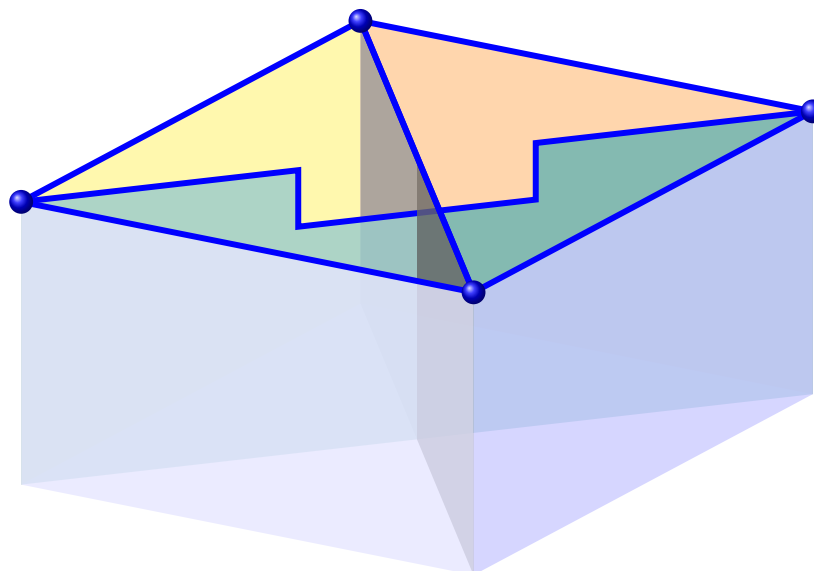
Erzeuger: $s_i, \tilde{s}_i$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Relationen: $s_i = \tilde{s}_i$ und $\tilde{s}_i s_{i+1} = \tilde{s}_{i+1} s_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

Nach Vereinfachung erhalten wir die Präsentation $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathcal{K}|, x_0) \cong$

$$\langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \mid [s_1, s_2] = [s_2, s_3] = [s_3, s_4] = [s_4, s_5] = 1 \rangle$$

Übung: Ist diese Gruppe abelsch? Ist die Untergruppe $\langle s_1, s_3, s_5 \rangle$ frei? Existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus auf $\langle a, b, c \mid - \rangle$?

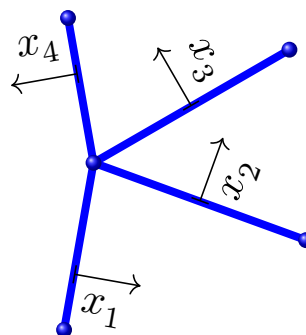
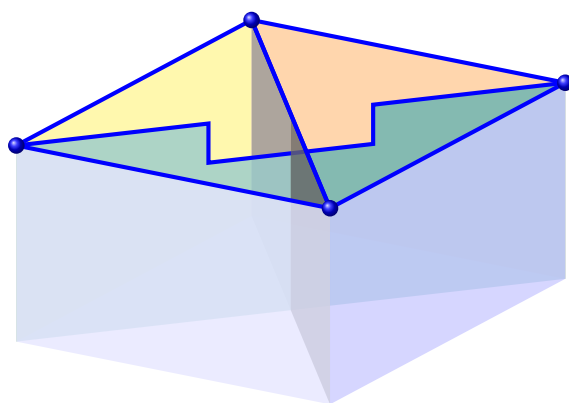


Aufgabe: Gegeben sei ein lokal-endlicher Graph $|\mathcal{K}| \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Wir können zudem Kreuzungen erlauben, wie oben skizziert. Präsentieren Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathcal{K}|, x_0)$.

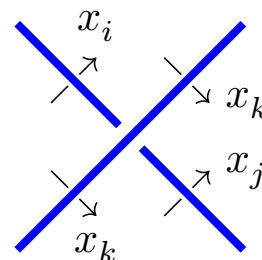
Lösung: Wir füllen durch Wände alles unterhalb von $|\mathcal{K}|$:

$$|\mathcal{L}| = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists (x, y, \tilde{z}) \in |\mathcal{K}| : z \leq \tilde{z} \}$$

Damit ist $\mathbb{R}^3 \setminus |\mathcal{L}|$ zusammenziehbar, somit einfach zusammenhängend. Dank Wirtinger L4M lesen wir Erzeuger und Relationen leicht ab:



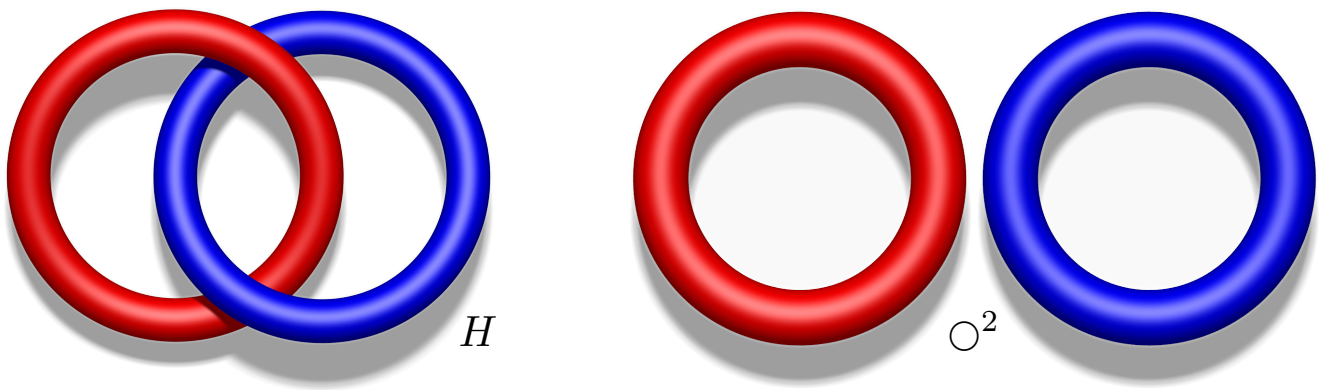
$$x_1 \cdots x_n = 1$$



$$x_i x_k = x_k x_j$$

Satz L4P: Wirtinger 1905

Jeden endlichen Graphen $|\mathcal{K}| \subseteq \mathbb{R}^3$ können wir (nach kleiner Drehung) zu einem ebenen Diagramm projizieren; daran lesen wir bequem die Wirtinger-Präsentation (S, R) für $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathcal{K}|, x_0)$ ab: Jede Kante liefert einen Erzeuger, jede Ecke und jede Kreuzung eine Relation (wie oben).



Aufgabe: Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : (\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$?

Lösung: Einschränkung von (f, g) ergibt einen Homöomorphismus der beiden Komplemente, $(f', g') : \mathbb{R}^3 \setminus H \cong \mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^2$. Funktorialität liefert einen Isomorphismus $(\pi_1(f'), \pi_1(g'))$ der Fundamentalgruppen (L2E), also $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus H, *) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^2, *) =: F$.

Die Gruppe $G \cong \langle s_1, s_2 \mid [s_1, s_2] \rangle$ ist abelsch, nicht jedoch $F \cong \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$. An dieser topologischen Invariante zerbricht die anfängliche Vermutung eines Homöomorphismus $(\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$. Insbesondere lässt sich die Hopf-Verschlingung H in $\mathbb{R}^3$ nicht entwirren zu $\bigcirc^2$.

Die hier gezeigten Knoten und Verschlingungen im $\mathbb{R}^3$ seien elastisch, beliebig dünn und unbegrenzt dehnbar. Geometrische Argumente und vertraute physikalische Hindernisse helfen uns hier nicht weiter. Glücklicherweise springt die Topologie ein, als „Gummigeometrie“.

Natürlich *vermuten* Sie gleich, aufgrund Ihrer physikalischen Erfahrung, dass sich die Hopf-Verschlingung H nicht entwirren lässt zur trivialen Verschlingungen $\bigcirc^2$. Doch wenn Sie ehrlich sind, wie oft und wie lange haben Sie es schon versucht? Ist das wirklich ein stichhaltiges Argument?

Es gibt unüberschaubar viele Möglichkeiten, H im $\mathbb{R}^3$ zu bewegen, zu deformieren, zu verwurschteln, ... und vielleicht auch zu entwirren? Allein die recht wacklige Erfahrung, dass es bisher nicht gelungen ist, bedeutet noch lange nicht, dass es prinzipiell unmöglich wäre.

Wir interpretieren hier „entwirren“ als stetige Deformation des Raumes. Insbesondere erhalten wir als Endergebnis dieses Prozesses immer einen Homöomorphismus $(\mathbb{R}^3, \text{Start}) \cong (\mathbb{R}^3, \text{Ziel})$. Die obige Berechnung der Invariante π_1 zeigt, dass $(\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^2)$ unmöglich ist.

Bemerkung: Auf die Frage „Gilt $(\mathbb{R}^3, H) \cong (\mathbb{R}^3, \circ^2)$?“ antworten wir hier „Nein, denn schon die Komplemente sind nicht homöomorph.“, genauer „Nein, schon die Gruppen der Komplemente sind nicht isomorph.“

Beachten Sie, dass die Frage gar nicht von Fundamentalgruppen spricht! So ist es immer in realistischen Anwendungen: Passende Werkzeuge müssen Sie selbst wählen, finden, probieren, In bewusst vereinfachten Übungsaufgaben wird Ihnen das Werkzeug gleich daneben gelegt; das ist für den Anfang gut gemeint, doch langfristig hoffnungslos unrealistisch. Lernen Sie Ihre Werkzeuge kennen und üben Sie den kreativen Gebrauch.

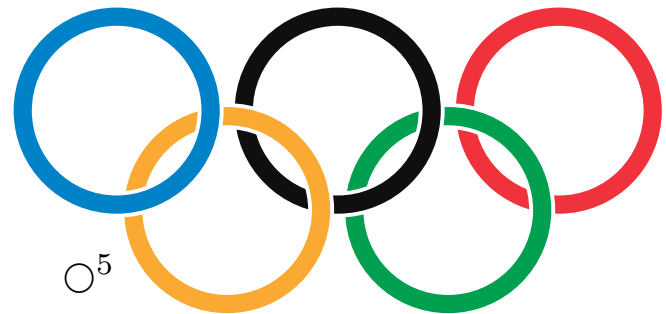
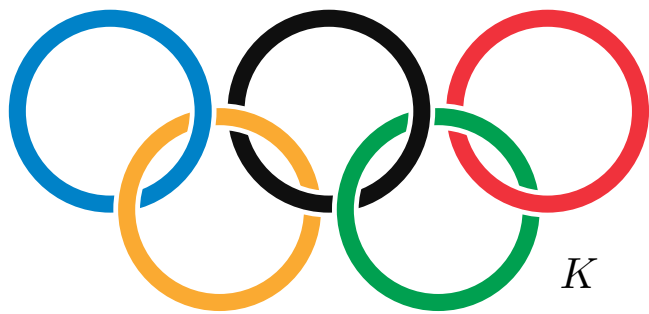
Bemerkung: Beide Gruppen F und G sind unendlich, genauer abzählbar unendlich. Als Invariante zur Unterscheidung $(\mathbb{R}^3, H) \not\cong (\mathbb{R}^3, \circ^2)$ genügt demnach nicht allein die Anzahl der Gruppenelemente! Die relevante Information ist also nicht nur die *Zählung* der Homotopieklassen von Schleifen, sondern ihre *Verknüpfung*. Wir benötigen nicht nur die Menge $\pi_1(X, x_0)$, sondern wirklich die *Gruppe* $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$. Diese algebraische Struktur codiert einen wesentlichen Teil des untersuchten Raumes!

Hauptdarstellerin in all diesen Anwendungen ist die Gruppe, also die Menge $\pi_1(X, x_0)$ zusammen mit der spezifischen Gruppenstruktur „ $\cdot$ “, sie ist der springende Punkt! Deshalb heißt es *Algebraische Topologie*: Wir übersetzen *topologische* Fragen in *algebraische* Fragen, die wir leichter lösen können und dann zurückübersetzen.

Bemerkung: Für Aussagen wie „ G ist abelsch.“ und „ F ist nicht abelsch.“ müssen wir in den hier präsentierten Gruppen $[S | R]$ tatsächlich mit Elementen rechnen. Diese Elemente sind Wortklassen, also Wörter über den Erzeugern S modulo Relationen erzeugt von R .

Schon zu $F = \langle s_1, s_2 | - \rangle$ stellt sich hier die Frage „Gilt $s_1 s_2 = s_2 s_1$?“; wir müssen also das Wortproblem in (S, R) lösen. Das ist meist schwer, im Allgemeinen sogar unlösbar. Freuen wir uns also an jedem Einzelfall, in dem wir dieses Problem lösen können. In der freien Gruppe gelingt dies denkbar einfach durch Reduktion auf gekürzte Wörter. Alles wird gut.

Bemerkung: Leichter als Elemente $x \in [S | R]$ sind Homomorphismen $[S | R] \rightarrow Z$. So lösen wir das Problem im Folgenden noch effizienter.



Aufgabe: Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : (\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, \mathcal{O}^5)$?

Lösung: Einschränkung von (f, g) ergibt $(f', g') : \mathbb{R}^3 \setminus K \cong \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}^5$.

Funktorialität liefert $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}^5, *) =: F$.

Die Gruppe $F \cong \langle s_1, \dots, s_5 \mid - \rangle$ ist frei, (vermutlich) nicht jedoch

$$G \cong \langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \mid [s_1, s_2] = [s_2, s_3] = [s_3, s_4] = [s_4, s_5] = 1 \rangle.$$

Warum? Der Präsentation sieht man solche Eigenschaften nicht sofort an: Isomorphieproblem! Es gibt viele weitere Präsentationen, ... auch freie?

Einfacher Trick: Wir zählen Darstellungen in eine endliche Gruppe.

$$\# \operatorname{Hom}(F, S_3) = 6^5 > \# \operatorname{Hom}(G, S_3)$$

😊 Wie immer benötigen wir eine Konstruktion oder eine Obstruktion, hier einen Homöomorphismus $(\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, \mathcal{O}^5)$ oder ein Hindernis. Die Fundamentalgruppe kommt uns da als Invariante wie gerufen. Sie haben nun ausreichend starkes Werkzeug!

Aufgabe: Ist die Gruppe G frei? **Lösung:** Die Abelschmachung ergibt $G_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^5$. Wäre G frei, so vom Rang 5. Dann wäre $\# \operatorname{Hom}(G, S_3) = 6^5$. Dies ist hier nicht der Fall, wie oben gesehen, also ist G nicht frei!

Der einfach-geniale Trick gelingt mit jeder nicht-abelschen Zielgruppe Z . Ein Computer kann $\operatorname{Hom}(G, Z)$ leicht vollständig auflisten und abzählen. Praktische Übung: Was genau ist hier zu prüfen? Programmieren Sie es!

😊 In der Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ mag der Vergleich von Elementen schwierig sein, die Konstruktion von Homomorphismen gelingt erfreulich leicht! Diese Weisheit, zugleich Warnung und Zuspruch, füllt sich nun in den Anwendungen mit konkreter Bedeutung. *Rechnen reinigt die Seele!*

😊 Die Gruppe G ist weder frei noch abelsch, sie ist *frei partiell abelsch*. Solche Gruppen gehören zu den **Artin–Tits–Gruppen**, siehe L335:

$$A_M := \langle S \mid (s, t)^{m_{st}} = (t, s)^{m_{ts}} : s, t \in S \rangle$$

Diese umfassen ein breites Spektrum von freien Gruppen (mit $m_{st} = 0$ für alle $s \neq t$) zu abelschen Gruppen (mit $m_{st} = 2$ für alle $s \neq t$). Dazwischen liegen die *frei partiell abelschen* Gruppen (mit $m_{st} \in \{0, 2\}$ für alle $s \neq t$). Sie heißen auch *rechtwinklige Artin–Gruppen*, engl. *right-angled Artin groups*, kurz RAAGs. Auf den ersten Blick scheint dies eine recht spezielle und einfache Beispielklasse, doch sie hat sich als erstaunlich reichhaltig und zugleich bemerkenswert flexibel erwiesen. Diese Gruppen sind seit langem ein sehr aktives Forschungsgebiet, insbesondere geometrisch und algorithmisch, und haben zu wichtigen Anwendungen geführt.

📖 Ruth Charney: *An introduction to right-angled Artin groups*. Geometriae Dedicata 125 (2007) 141–158. arXiv:math/0610668

🤔 Anschaulich scheint die ursprüngliche Frage klar: „Eine Entknotung kann unmöglich gelingen! Wie in aller Welt sollte so etwas aussehen?“ Das klingt verdächtig nach einem „Beweis durch Autorität“, oder nach „vollständiger Illusion“ oder auch „Beweis durch Mangel an Phantasie“. Wir haben in dieser Vorlesung schon einige Lösungen konstruiert, von denen man vielleicht voreilig ähnlich Pessimistisches ausgerufen hätte.

😊 Hier können Sie sorgsam *induktiv* argumentieren: Wir haben oben gezeigt, dass sich die Hopf–Verschlingung nicht trennen lässt. Davon profitieren wir nun: Hier lässt sich das blau-gelbe Paar nicht trennen, ebensowenig gelb-schwarz, schwarz-grün, grün-rot. Wir denken uns dazu die anderen drei Komponenten entfernt und betrachten nur das jeweilige Hopf–Paar. Auch hier schreibt die Aufgabe den Lösungsweg nicht vor, Sorgfalt ist gefordert, Kreativität ist gewünscht.

😊 Das zeigt sogar eine stärkere Aussage: Die olympischen Ringe lassen sich nicht in (zwei nicht-leere Teile) trennen, sagen wir in $\mathbb{R}_{<0}^3$ und $\mathbb{R}_{>0}^3$.



So gesehen vor einer Eisdiele!
Sind das drei olympische Ringe?
Good to go. Ready for take-away.

Überall in Ihrem Alltag entdecken Sie Mathematik, oft auch Topologie, sobald Sie mit mathematisch geöffneten Augen durchs Leben gehen!

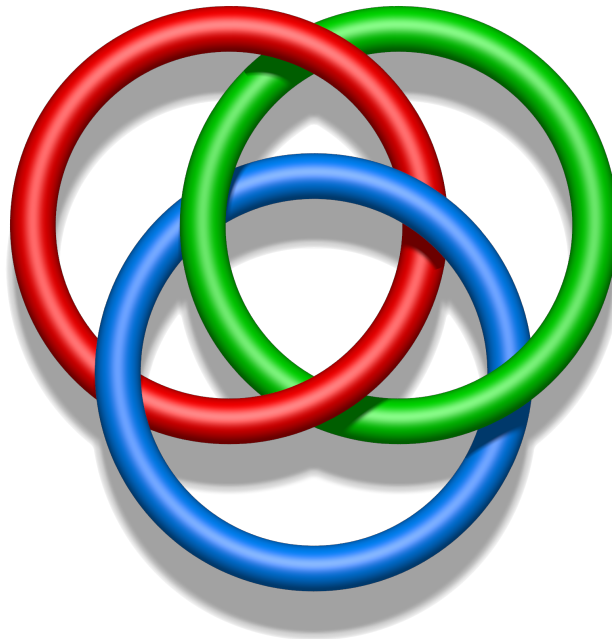
Zugegeben, die Berechnung der Fundamentalgruppe ist an dieser Stelle nicht nötig, ausreichend Erfahrung genügt oft, so auch hier.

Dennoch ist es gut zu wissen, wie die Mathematik unsere Intuition stützt und auch dort noch wirkt, wo unsere naive Anschauung versagt.

⚠ Beim Anschließen Ihres Fahrrads spielt, wie Sie wissen, die Geometrie und die physikalische Beschaffenheit die wichtigste Rolle. Fahrrad, Schloss, Ständer, etc. sind recht rigide, und sicherlich nicht beliebig dehnbar, wie in der Topologie frech-vereinfachend angenommen.

Liefert die Topologie also gar keine verwertbaren Aussagen? Oh doch, aber meist nur in eine bestimmte Richtung: *Wenn* Schloss und Rahmen verschlungen sind (à la Hopf), *dann* lassen sie sich nicht durch stetige Deformation voneinander trennen. Das ist ein *topologisches* Hindernis, das unabhängig von Geometrie und Physik besteht.

Sind die topologischen Hindernis aus dem Weg, so kann es weiter geben, etwa geometrische. Eventuell lässt sich das Fahrrad auf dem obigen Photo doch nicht so leicht aus dem Ständer heben, da der Bewegungsspielraum hierzu nicht ausreicht. Die Topologie macht hierüber keine Aussage. Verschlingung ist *hinreichend*, aber nicht *notwendig* zur Diebstahlsicherung. Achja, Dieb:innen respektieren oft nicht einmal die Topologie: Aufschneiden ist untopologisch!

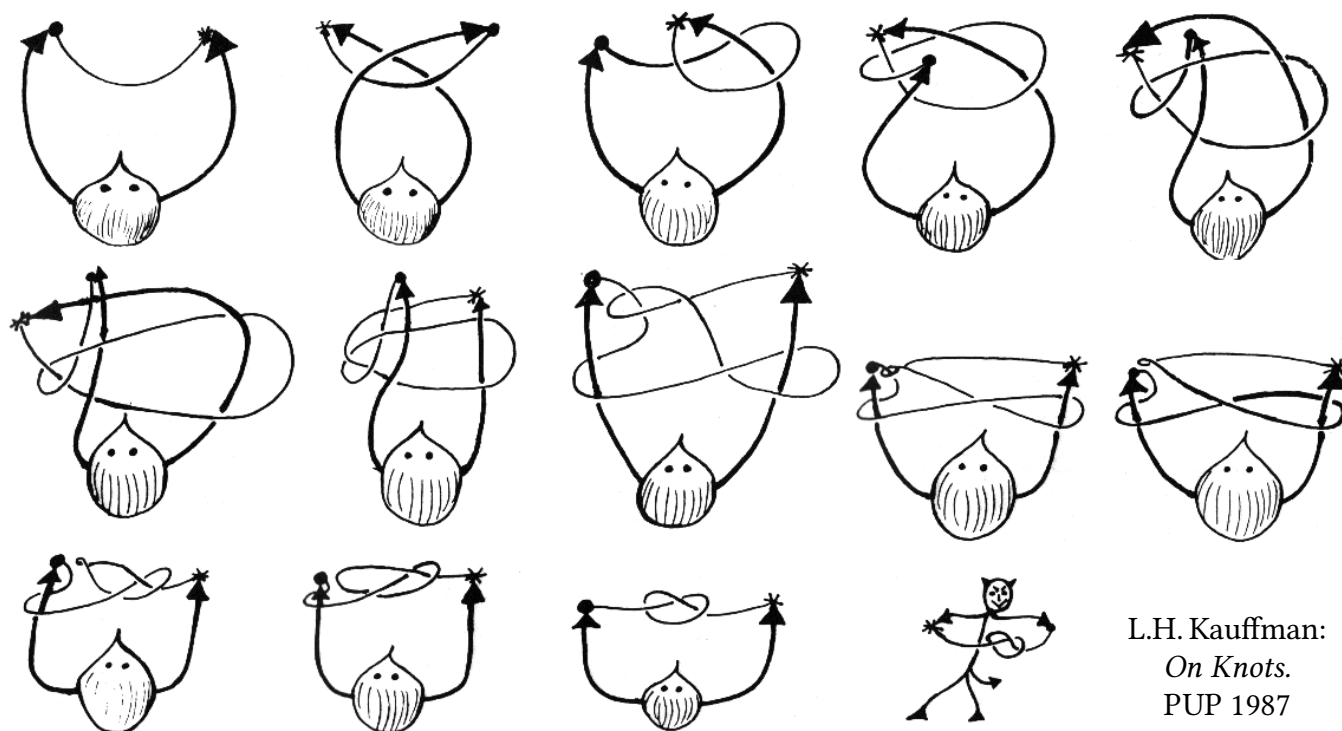


Wenn Sie einen beliebigen der drei Ringe entfernen, dann sind die beiden anderen offensichtlich trennbar. Weniger offensichtlich: Ist B trennbar? Auch dies gelingt mit $\pi_1 \dots$ nach kurzer geschickter Rechnung.

Vorüberlegung: Wenn sich die Borromäischen Ringe B trennen lassen, also eine Komponente von den anderen beiden wegbewegen lässt, dann wäre B vollständig entwirrbar, also $(\mathbb{R}^3, B) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc^3)$. Wir vergleichen also B mit der trivialen Verschlingung $\bigcirc^3$.

Übung: (1) Präsentieren Sie $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus B, *)$ und $F := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc^3, *)$.
 (2) Zeigen Sie, dass G von drei geeigneten Elementen erzeugt wird.
 (3) Zeigen Sie $\sharp \text{Hom}(G, S_3) < 6^3$; es genügt *eine* kurze Rechnung.

😊 Die Borromäischen Ringe $B \subseteq \mathbb{R}^3$ lassen sich demnach nicht trennen! Vielleicht fanden Sie die vorigen Beispiele allzu banal und offensichtlich. Sie sind es nicht, doch unsere Anschauung ist geradezu überwältigend. Die Borromäischen Ringe sind schon eine härtere Kopfnuss, insbesondere wenn man sie zum ersten Mal sieht und die naive Anschauung mangels Erfahrung versagt. Die Mathematik wirkt auch hier, präzise und effizient. In der Knotentheorie entwickelt man weitere Werkzeuge hierzu. Schon die Fundamentalgruppe ist erfreulich leicht und effizient.



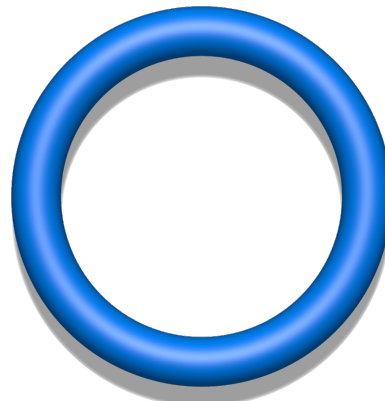
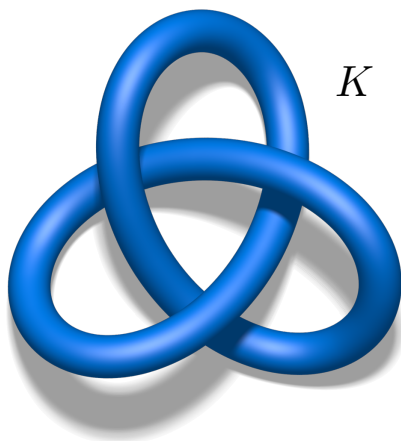
🔍 Eine Zauberin hält ein unverknotetes Seil an beiden Enden. Sie behauptet, ohne loszulassen das Seil verknoten zu können. Ist dieses verblüffende Kunststück auf ehrliche Weise möglich?

Ein topologischer Betrug: Kauffmans Seiltrick

Im $\mathbb{R}^4$ gelingt es, siehe E607, doch dies spielt im $\mathbb{R}^3$. Sie wittern Betrug. „Es gelingt!“, behauptet die Zauberin selbstsicher. „Dann zeige mir wie!“, verlangen Sie und fordern in guter wissenschaftlicher Tradition einen konstruktiven Beweis. „Ich darf das Geheimnis nicht preisgeben und die Transformation nur unter einer Samtdecke vollziehen.“ – „Das klingt verdächtig.“ – „Vertraue mir! Ich habe diese Technik von meiner Meisterin gelernt, unter einem Schweigegelübde. Dieses geheime Wissen wird seit Generationen nur von Meisterinmund zu Schülerinohr weitergegeben.“

„Starke Behauptungen erfordern starke Beweise.“ – „Du musst glauben! Mit Schulmathematik kann man das nicht verstehen.“ Das Gespräch mit der selbsternannten Wundertopologin führt offensichtlich zu nichts. Sie beschließen der Sache selbständig kritisch auf den Grund zu gehen.

Schulmathematik genügt nicht, etwas Unimathematik hingegen schon! Sie suchen einen Beweis der Unmöglichkeit, also eine Obstruktion: transparent, nachvollziehbar, kommunizierbar. Das ist ehrliche Arbeit, das ist Wissenschaft, das ist Mathematik, die Kunst der Erkenntnis.



Aufgabe: Existiert ein Homöomorphismus $(f, g) : (\mathbb{R}^3, K) \cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc)$?

Lösung: Wir finden $F := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bigcirc, *) \cong \langle x \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$ und dank Wirtinger L4M auch $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *) \cong \langle a, b, c \mid a^b = c, b^c = a, c^a = b \rangle$.

Sind diese Gruppen isomorph oder nicht? Ist G abelsch? Der Präsentation sieht man solche Eigenschaften nicht sofort an: Isomorphieproblem!

Trick: Wir finden $G \twoheadrightarrow S_3$ mit $a, b, c \mapsto (1, 2), (2, 3), (3, 1)$. **Probe!**

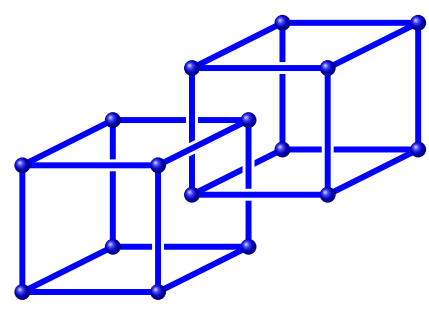
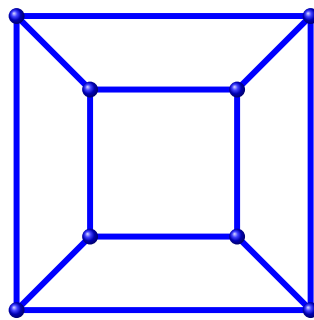
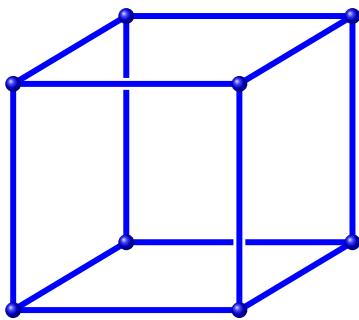
Somit ist die Gruppe G nicht abelsch, also $(\mathbb{R}^3, K) \not\cong (\mathbb{R}^3, \bigcirc)$.

Die Knotentheorie untersucht Einbettungen von Kreislinien und Flächen im $\mathbb{R}^3$ oder allgemein von schönen Teilräumen im $\mathbb{R}^n$ modulo Bewegung. Sie nutzt und entwickelt hierzu geeignete Invarianten, als erstes die Fundamentalgruppe, dann Knotenpolynome und Knotenhomologie uvm.

Als Forschungsgebiet mögen Knoten etwas exotisch wirken, wie auch sonst alles, was man nicht kennt und nur von weiter Ferne betrachtet. Andererseits sind Knoten anschaulich „begreifbar“ und faszinierend „verwirrend“. In den letzten Jahrzehnten haben Mathematiker:innen hierzu erstaunlich raffinierte Techniken und Invarianten entwickelt.

😊 *Fun fact:* Knotentheorie in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist langweilig – dank einem interessanten Satz! Dank Jordan–Schoenflies lässt sich jede Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ entwirren zur Standardeinbettung $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Im polygonalen Fall haben wir dies algorithmisch bewiesen durch sukzessives Einklappen.

😊 Knotentheorie im Raum $\mathbb{R}^3$ ist interessant – dank vieler interessanter Beispiele! Unser mathematisches Modell ist sinnvoll, es gibt nicht-triviale Knoten: Die Kleeblattschlinge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ lässt sich nicht entknoten!



Unsere vorigen Beispiele zeigen Knoten und Verschlingungen und sind daher besonders leicht fasslich: Damit haben wir alltägliche Erfahrung! Unsere Techniken behandeln ebenso auch allgemeine Graphen im $\mathbb{R}^3$. Damit erschließen wir uns ein riesiges Beispielrepertoire! Knoten und Verschlingungen sind darin nur ein (besonders schöner) Spezialfall.

Aufgabe: Sei $\mathcal{K}$ das 1-Skelett des Würfels $W = [-1, 1]^3$. Präsentieren Sie $G := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus |\mathcal{K}|, x_0)$ mit mindestens drei verschiedenen Methoden. Warum erhalten Sie mitunter recht verschiedene Präsentationen? Warum erhalten Sie jedoch garantiert immer „dieselbe“ Gruppe G ? In welchem Sinne sind alle Ihre Präsentationen äquivalent?

Lösung: (1) Wir können die Wirtinger-Präsentation der linken Skizze ablesen, wie in Satz L4P dargelegt. Das ist Schema F und gelingt immer.
 (2) Noch einfacher gelingt es mit der mittleren Skizze: Wir bewegen dazu $K \subseteq \mathbb{R}^3$ in eine übersichtlichere Lage, das vereinfacht unsere Rechnung. Die präsentierte Gruppe ist dieselbe – wie immer bis auf Isomorphie.
 (3) Noch einfacher gelingt es durch geometrisches Verständnis im $\mathbb{R}^3$, siehe L410. Wir wählen *fünf* der sechs Facetten, koorientieren jede davon, und erhalten sofort die *freie* Präsentation $\langle s_1, \dots, s_5 \mid - \rangle$.

😊 Schema F gelingt immer. Verständnis ist effizienter. Denken hilft! So ist es oft in der Mathematik, angefangen bei der Koordinatenwahl. Die richtige Sichtweise kann ein Problem vereinfachen, manchmal gar trivialisieren. Daher ist es gut, möglichst vielfältige Techniken und Lösungswege zu kennen und aktiv zu erproben. Mathematik verbindet sorgsames Handwerk mit erfinderischer Kreativität. Beides will geübt sein, beides kann erlernt werden, am besten an guten Vorbildern.

Unsere Anschauung ist am Raum $\mathbb{R}^3$ geschult, und hier trägt sie uns erstaunlich selten. Ganz verlässlich ist sie leider auch hier schon nicht... Mit unseren Techniken können wir ebenso in *jeder* Dimension rechnen!

Aufgabe: Wir betrachten $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{S}^2, *)$. Was sagt Ihre „Intuition“ oder „Anschauung“ hierzu? Woher kommt sie? Wie verwandeln Sie dies in eine kommunizierbare, korrekte Rechnung?

😊 Ich zeige bewusst keine Graphik hierzu, denn jeder Versuch muss zwangsläufig rabiāt auf Dimension 3 oder gar 2 reduzieren, das will geübt sein. Sie sollten es selbst versuchen, um sich eine Brücke zu bauen vom $\mathbb{R}^3$, den Sie bereits kennen, in den $\mathbb{R}^4$, den Sie erst erkunden.

Fun fact: Im $\mathbb{R}^4$ ist die Kleeblattschlinge entknotbar, wie allgemein jeder Knoten $K \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Sehen Sie wie? Skizze? Koordinaten? Siehe E607!

Hier geht die mathematische Methode mutig voran, die intuitive Anschauung folgt und wächst daran.

Solches Wissen zahlt sich aus, etwa wenn mal wieder Doctor Strange einem interdimensionalen Wesen wie Dormammu begegnet.

Lösung: Wir betrachten hier die Standardeinbettung $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Als Wand der Kondimension 1 haben wir dazu den Ball $\mathbb{D}^3 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$. Das Komplement ist einfach zshgd, dank $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{D}^3 \cong \mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{D}^4 \cong \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Die freie Wirtinger-Präsentation L4D liefert $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{S}^2, *) \cong \langle s_1 \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Genau genommen verlangt unser Satz L4D einen polytopalen Komplex. Wir ersetzen also den Ball $\mathbb{D}^3$ mit Ran $\mathbb{S}^2$ topologisch äquivalent durch den Würfel $W = [-1, 1]^3$ mit Rand $\partial[-1, 1]^3$. Nun lässt sich Satz L4D direkt anwenden und liefert die gesuchte Fundamentalgruppe.

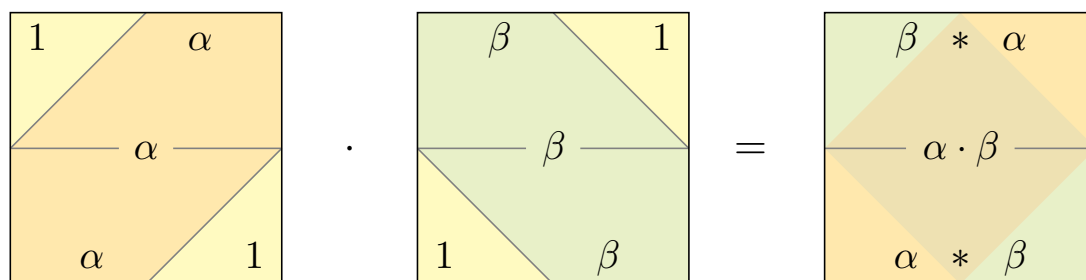
Die Rechnung gelingt unabhängig von der Dimension. Statt wie bisher „Skizzen zuerst“ wendet sich unsere Priorität nun zu „Formeln zuerst“. Die Kunst besteht darin, beide zu beherrschen und ineinander übersetzen zu können. Idealerweise erzieht die Topologie Sie zur Zweisprachigkeit.

Mathematik umschrieb man einst als die Lehre von Zahlen und Figuren. Diese Zusammenfassung zweier grundlegender Aspekte hat noch immer ihren Platz, insbesondere ihr gegenseitiger Nutzen in der Topologie: Bilder betonen die Idee, Formeln liefern die Präzision.

Anwendung auf topologische Gruppen

Sei $(G, \mathcal{T}, \cdot, 1, {}^{-1})$ eine topologische Gruppe. Allgemeiner genügt hier ein **H-Raum**, auch **Hopf-Raum** genannt, also ein topologischer Raum $(G, \mathcal{T})$ mit stetiger Multiplikation $\cdot : G \times G \rightarrow G$ und neutralem Element $1 \in G$.

Aufgabe: Ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, 1)$ abelsch? **Lösung:** Ja!
Das ist höchst erstaunlich! Zuerst der frappierende Beweis durch Bild:



Auch die lineare Textfassung ist reinste Poesie: Zu je zwei Schleifen α, β in $(G, 1)$ haben wir dank L1D/L1c Homotopien $H : \alpha * 1 \sim \alpha \sim 1 * \alpha$ und $K : 1 * \beta \sim \beta \sim \beta * 1$. Das gilt soweit in jedem topologischen Raum $(G, 1)$. Nun können wir (stetig!) multiplizieren: Wir erhalten so die Homotopie $H \cdot K : \alpha * \beta \sim \alpha \cdot \beta \sim \beta * \alpha$. Demnach ist die Gruppe $\pi_1(G, 1)$ abelsch.

Anwendung auf topologische Gruppen

Aufgabe: Lässt sich der Raum $(X, \mathcal{T})$ zu einer topologischen Gruppe $(X, \mathcal{T}, \cdot, 1, {}^{-1})$ aufwerten? **Ja – Konstruktion oder Nein – Obstruktion!**

- (1) $\mathbb{R}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{R}, +, 0)$.
 - (2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{R}^\times, \cdot, 1)$.
 - (3) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$? Ja, homöomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
 - (4) $\mathbb{C}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{C}, +, 0)$.
 - (5) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? Ja! Es genügt $(\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$.
 - (6) $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$? Nein! $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, *)$ ist nicht abelsch!
 - (7) Bälle $\mathbb{D}^n$? Trivial für $n = 0$, unmöglich für $n \geq 1$.
 - (8) Sphären $\mathbb{S}^n$? Unter den Sphären kennen wir nur drei topologische Gruppen (F1Q), nämlich $\mathbb{S}^0 = \mathrm{GO}_1 \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1 = \mathrm{GU}_1 \mathbb{C} \cong \mathrm{SO}_2 \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^3 \cong \mathrm{SU}_2 \mathbb{C}$. Umgekehrt bewies Élie Cartan 1936, dass diese Liste vollständig ist: Unter allen Sphären $\mathbb{S}^n$ sind nur $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ topologische Gruppen.
- ⚠ Die Konstruktion dieser drei Beispiele ist leicht, doch mögliche Obstruktionen für die verbleibenden Sphären sind viel schwieriger.

Vielleicht hätten Sie bei (3) leichtfertig ausgerufen: „Nein!“ und bei (6): „Keine Ahnung.“ Wie immer benötigen wir entweder eine Konstruktion oder ein Hindernis. Sie haben nun schon einige topologische Werkzeuge, und die Fundamentalgruppe beantwortet die Frage (6) sehr elegant.

(7) Hier hilft π_1 nicht weiter. (7a) Jede topologische Gruppe ist homogen (E703), doch Rand und Inneres von $\mathbb{D}^n$ sind topologisch verschieden (J71). (7b) Alternative: Nach Brouwer J4H ist $\mathbb{D}^n$ ein Fixpunktraum, doch jedes Gruppenelement $g \neq e$ operiert fixpunktfrei, das schließt $n \geq 1$ aus.

(8) Folgende Aussagen gelten nur in Dimension $n = 1, 2, 4, 8$:

(a) Der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist eine reelle Divisionsalgebra.

(b) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist parallelisierbar. (c) $\mathbb{S}^{n-1}$ ist ein Hopf-Raum.

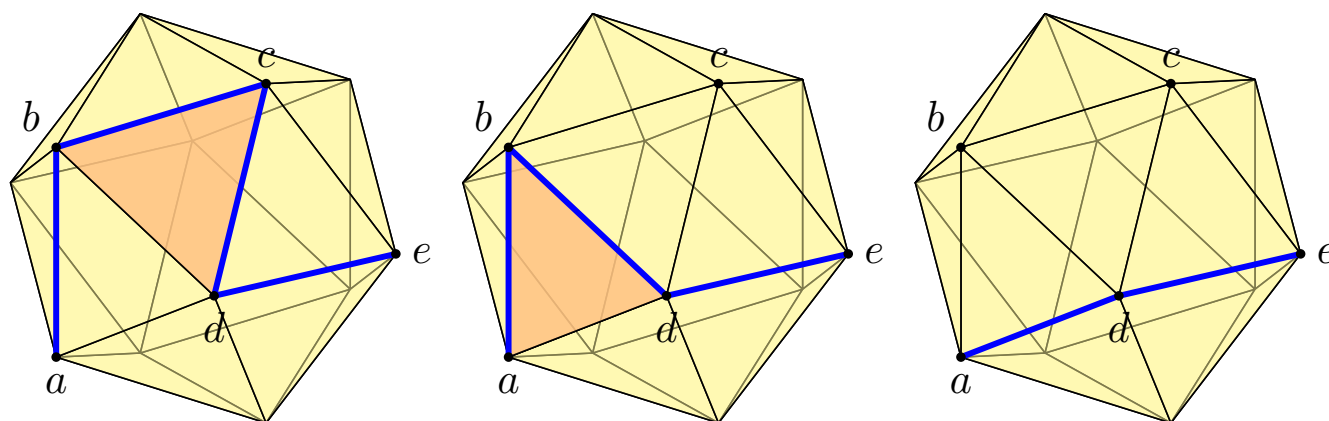
 Elie Cartan: *La topologie des espaces représentatives des groupes de Lie*. Enseign. Math. 35 (1936) 177–200. Hans Samelson: *Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten*. Comm. Math. Helvetici. 13 (1940) 144–155. John Frank Adams: *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*. Ann. of Math. 72 (1960) 20–104. Ebbinghaus *et al*: *Zahlen*. Springer 1992.

Aufgabe: Ist $(\mathbb{S}^n, \cdot, e)$ eine topologische Gruppe, $n \geq 1$, so ist n ungerade. Demnach können $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^6, \dots$ keine topologischen Gruppen sein.

Hinweis: Erinnern Sie den Satz vom Igel und seinen Beweis!

Lösung: Wir wählen einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$ von $\gamma(0) = e$ zu einem Punkt $\gamma(1) = a \in \mathbb{S}^n \setminus \{e\}$. Dann ist $H(t, x) = \gamma(t) \cdot x$ eine Homotopie von $H_0 = \text{id}_{\mathbb{S}^n}$ nach $H_1 = f : x \mapsto ax$. Da f fixpunktfrei ist, existiert eine Homotopie K von $K_0 = f$ weiter nach $K_1 = -\text{id}_{\mathbb{S}^n}$, wie üblich affin und retrahiert vermöge $K(t, x) = [(1-t)ax - tx] / |(1-t)ax - tx|$, siehe G4c. Aus $\text{id}_{\mathbb{S}^n} \simeq f \simeq -\text{id}_{\mathbb{S}^n}$ folgt $1 = \deg(\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = \deg(-\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$ (J3E). Das ist nur für ungerades n möglich. QED

😊 Dieses elegante Argument kennen Sie bereits aus Satz J5B vom gekämmten Igel: Auf $\mathbb{S}^{2k}$ mit $k \geq 1$ hat jedes (stetige tangential) Vektorfeld eine Nullstelle. Mit dem Satz J5c von Poincaré–Hopf gilt: Ist $(M, \cdot, 1)$ eine geschlossene, zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 1 und zugleich eine topologische Gruppe, so gilt $\chi(M) = 0$. Das schließt erneut die Sphären $\mathbb{S}^{2k}$ für $k \geq 1$ aus, denn $\chi(\mathbb{S}^{2k}) = 2$.



Beispiel: Ein SKomplex K und Kantenzüge $abcde \approx abde \approx ade$.

Wir betrachten weiterhin Polygonzüge und polygonale Homotopie wie schon seit L4A. Dies spezialisieren wir nun für das Polyeder $|K|$ eines Simplicialkomplexes K . Wir verlangen zusätzlich zu L4A, dass Polygonzüge von Ecke zu Ecke laufen entlang der Kanten von K . Polygonale Homotopien laufen dann über die Dreiecke von K wie in der obigen Skizze illustriert. Dies führt zu einer weiteren starken Vereinfachung, die ich ob ihrer Eleganz nochmals ausformuliere.

Definition L6A: Kantenzüge

Sei K ein Simplicialkomplex mit Eckenmenge $\Omega = \Omega(K)$.

- (1) Ein **Kantenzug** $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K ist eine Folge von Eckpunkten $v_0, v_1, \dots, v_n \in \Omega$ mit der Kantenbedingung $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\} \in K$.
- (2) Der **umgekehrte Kantenzug** $\bar{w} = v_n \dots v_1 v_0$ verläuft ebenso in K . Zum Punkt $a \in \Omega$ ist $\text{id}_a = a$ der **konstante Kantenzug** der Länge 0.
- (3) Kantenzüge $w = v_0 v_1 \dots v_n$ und $w' = v'_0 v'_1 \dots v'_m$ sind **verknüpfbar** falls $v_n = v'_0$; ihre **Verknüpfung** ist dann $w * w' := v_0 v_1 \dots v_n v'_1 \dots v'_m$.

- 😊 Wir erhalten die Kategorie $P(K)$: (a) Objekte sind $a, b, c, \dots \in \Omega$.
 (b) Morphismen von a nach b sind die Kantenzüge $w : a \rightarrow b$ in K .
 (c) Verknüpfung ist Aneinanderhängung $(w : a \rightarrow b) * (w' : b \rightarrow c)$.

Dabei addieren sich die Längen. Invertierbar sind also nur die Identitäten. Insbesondere ist $\bar{w}$ noch nicht invers zu w , dazu nutzen wir Homotopie...

Definition L6A: simpliziales Fundamentalgruppoid

(4) Die Äquivalenz $\approx$ von Kantenzügen in K wird erzeugt durch **simpliziale Homotopien** $v_0 \dots v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_n \approx v_0 \dots v_{k-1} v_{k+1} \dots v_n$ mit $\{v_{k-1}, v_k, v_{k+1}\} \in K$. Als Spezialfall vereinbaren wir $v_0 v_0 \approx v_0$. Damit gilt $w * \bar{w} \approx v_0$ für jeden Kantenzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K .

(5) Zum Komplex K erhalten wir das **simpliziale Fundamentalgruppoid**

$$\Pi(K) := P(K)/\approx = \frac{\{\text{Kantenzüge } w = v_0 v_1 \dots v_n \text{ in } K\}}{\text{simpliziale Homotopie } \approx \text{ in } K}$$

mit der Verknüpfung $[w] \cdot [w'] = [w * w']$ durch Aneinanderhängen.

Zu $x_0 \in \Omega(K)$ erhalten wir die **simpliziale Fundamentalgruppe**

$$\pi_1(K, x_0) := \Pi(K, x_0, x_0) = \frac{\{\text{geschlossene Kantenzüge in } (K, x_0)\}}{\text{simpliziale Homotopie } \approx \text{ in } (K, x_0)}.$$

😊 Diese Konstruktion ist extrem elegant, ebenso einfach wie allgemein.

Übung: Warum ist $\Pi(K)$ ein Gruppoid und $\pi_1(K, x_0)$ eine Gruppe? Was genau ist für diese Behauptungen zu zeigen? Zeigen Sie es!

Das rein kombinatorisch definierte Fundamentalgruppoid $\Pi(K)$ eines Simplicialkomplexes K ist an Einfachheit wohl kaum zu überbieten. Wir können es anschaulich visualisieren und präzise damit rechnen.

Das Gruppoid $\Pi(K)$ und die Gruppe $\pi_1(K, x_0)$ enthüllen grundlegende algebraische Strukturen. Sie sind unmittelbar auf dem Computer implementierbar und direkt algorithmischen Fragen zugänglich.

Das topologisch definierte Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ eines Raumes X erfordert etwas technische Vorbereitung: stetige Abbildungen, spezielle Homotopien, usw. Das ist nicht schwer, aber es muss getan werden (§L1).

Wir werden die simpliziale Sichtweise im Folgenden dazu nutzen, um die Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|, x_0)$ zu berechnen, das heißt möglichst explizit zu präsentieren. Das wird sich als effizientes Werkzeug erweisen.

Satz L6B: simpliziale Approximation

Für jeden Simplicialkomplex K haben wir den Gruppoidisomorphismus

$$\varphi : \Pi(K) \xrightarrow{\sim} \Pi(|K|, \Omega) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Für jeden Fußpunkt $x_0 \in \Omega$ erhalten wir den Gruppenisomorphismus

$$\varphi : \pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(|K|, x_0) : [w]_{\approx} \mapsto [|w|]_{\sim}.$$

Beweis: Dies beweist man (wie Satz L4B) mit simplicialer Approximation (Satz I4J) von Schleifen und ihren Homotopien in $(|K|, x_0)$. QED

Wiedereinmal rettet uns, oh Wunder, die simpliziale Approximation, so bringen wir die starken Werkzeuge der Linearen Algebra ins Spiel. Die simpliziale Technik führt uns ins gelobte Land der Topologie: Sie macht stetiges linear, kompliziertes simpel, hässliches schön!

Simpliziale vs topologische Fundamentalgruppe

L606
Erläuterung

Hier ist $\Pi(|K|, \Omega)$ eine Unterkategorie des Fundamentalgruppoids $\Pi(|K|)$: Objekte sind die Eckpunkte $a, b, c, \dots \in \Omega$, also im Allgemeinen nicht alle Punkte des Polyeders $|K|$. Morphismen $[\alpha] : a \rightarrow b$ sind alle Wegeklassen zwischen je zwei Eckpunkten a und b . Morphismen werden hierbei also nicht eingeschränkt, wie haben demnach eine *volle* Unterkategorie (H1B).

😊 Satz L6B erlaubt die bequem-effiziente Berechnung der (topologisch definierten) Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|, x_0)$ durch die (kombinatorisch definierte) simpliziale Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$ und umgekehrt.

😊 Letztere entsteht aus Kantenzügen, also letztlich Textverarbeitung von Wörtern über dem Alphabet $\Omega(K)$ nach den obigen Regeln. Wir nutzen dankend die Äquivalenz dieser beiden Sichtweisen.

Damit erhält die Fundamentalgruppe ihre einfachste, geradezu kristalline Form, direkt intuitiv zugänglich verbindet sie geometrische Bedeutung mit kombinatorischer Berechnung. Bemerkenswerterweise ist diese rigide simpliziale Form isomorph zur flexiblen topologischen Form.

Fundamentalgruppe eines Baumes

Als einfachen, aber grundlegenden Spezialfall betrachten wir zunächst einen *Baum*, also einen zusammenhängenden zyklfreien Graphen.

Satz L6c: Fundamentalgruppe eines Baumes

Für jeden Baum T gilt $|T| \simeq \{x_0\}$ und somit $\pi_1(T, x_0) = \pi_1(|T|, x_0) = \{1\}$.

Beweis: Wir haben $\pi_1(|T|, x_0) \cong \pi_1(T, x_0)$ dank dem vorigen Satz L6B. Wir können also sowohl topologisch als auch simplizial arbeiten.

$$\pi_1(\{x_0\}, x_0) \stackrel{\text{L2L}}{\cong} \pi_1(|T|, x_0) \stackrel{\text{L6B}}{\cong} \pi_1(T, x_0) \stackrel{\text{I3H}}{\cong} \pi_1(\langle \{x_0\} \rangle, x_0)$$

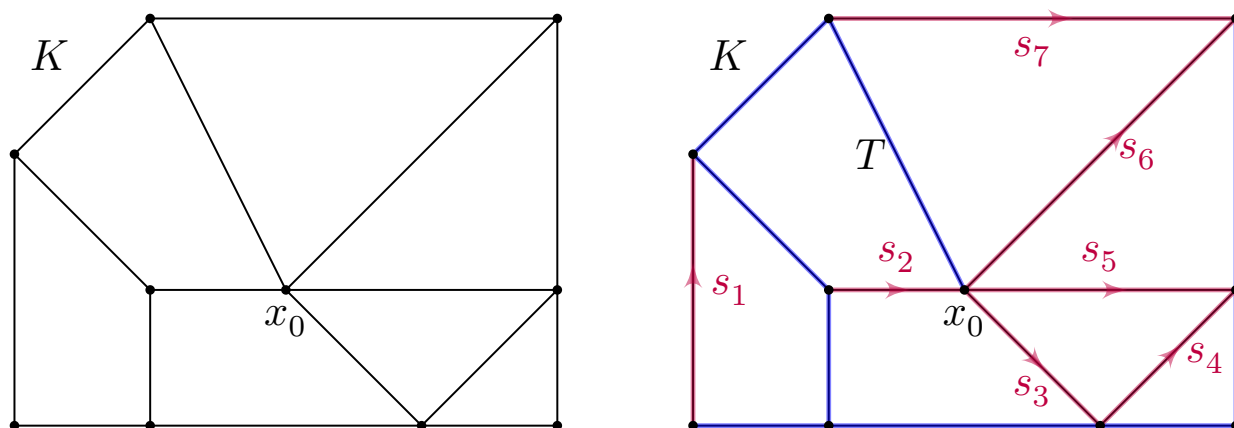
Topologische Sichtweise: Der topologische Raum $(|T|, x_0)$ ist stark zusammenziehbar (I3I). Damit folgt $\pi_1(|T|, x_0) \cong \pi_1(\{x_0\} = \{1\})$ dank Isomorphie L6B und Homotopie-Invarianz L2L. QED

Simpliziale Sichtweise: Zwischen je zwei Ecken x_0 und a des Baums T existiert genau ein gekürzter Kantenzug w_a (I3H). Hieraus folgt insbesondere $\pi_1(T, x_0) \cong \pi_1(\langle \{x_0\} \rangle, x_0) = \{1\}$. QED

Wahl eines Spannbaums

Wiederholung: Jeder zshgde Graph erlaubt die Wahl eines Spannbaums!

Beispiel: Ein Graph K mit der Wahl eines Spannbaums $T \subseteq K$ (blau). Die orientierten Kanten in $K \setminus T$ (rot) erzeugen frei die Gruppe $\pi_1(K, x_0)$.



Für die Fundamentalgruppe sind Bäume zwar langweilig, doch nützlich, insbesondere Spannäume sind oft eine wichtige Hilfskonstruktion. Wir untersuchen nun beliebige Graphen und anschließend beliebige Simplizialkomplexe. Ausgangspunkt ist die Wahl eines Spannbaums!

Graphen haben freie Fundamentalgruppen.

Satz L6D: Fundamentalgruppe eines Graphen

Sei K ein zshgder Graph, $x_0 \in \Omega$ eine Ecke und $T \subseteq K$ ein Spannbaum. Dann ist $\pi_1(K, x_0)$ frei über den Erzeugern $K \setminus T$. Explizit haben wir

$$(\psi, \varphi) : \pi_1(K, x_0) \cong F := [S | R] \quad \text{mit}$$

$$S = \{s_{ab}, s_{ba} \mid \{a, b\} \in K \setminus T\} \quad \text{als Erzeuger und}$$

$$R = \{s_{ab}s_{ba} \mid \{a, b\} \in K \setminus T\} \quad \text{als Relationen sowie}$$

$$\varphi : F \rightarrow \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [(x_0 \xrightarrow{T} a) * ab * (b \xrightarrow{T} x_0)] \quad \text{und}$$

$$\psi : \pi_1(K, x_0) \rightarrow F : [v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n] \mapsto [s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \dots s_{v_{n-1} v_n}].$$

Zur bequemen Schreibweise vereinbaren wir $s_{ab} := 1$ für $\{a, b\} \in T$.

Die Hilfswege $x_0 \xrightarrow{T} a$ und $b \xrightarrow{T} x_0$ verlaufen vollständig im Spannbaum T . Mit kürzester Länge sind sie zudem eindeutig. Das können wir durch Kürzen immer erreichen und so kanonische Verbindungswege festlegen.

😊 Ist K endlich, so ist $\pi_1(K, x_0)$ frei vom Rang $|K \setminus T| = 1 - \chi(K)$.

Graphen haben freie Fundamentalgruppen.

Aufgabe: Zeigen Sie dies nach dem Vorbild der Wirtinger-Präsentation.

Anleitung: Die Homomorphismen (a) ψ und (b) φ sind wohldefiniert.

(c) Die Konstruktion garantiert $\psi \circ \varphi = \text{id}_F$, also ist ψ surjektiv.

(d) Zur Injektivität von ψ zeigen wir schließlich $\text{Ker } \psi = \{1\}$.

😊 Wir verallgemeinern diese Präsentation in Satz L6I für beliebige Simplicialkomplexe und perfektionieren den Beweis. Der Spezialfall von Graphen ist jedoch wichtig genug, um hier separat ausgeführt zu werden.

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:

$$\begin{array}{ccc}
 P(K, x_0, x_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta} \\ \xleftarrow{\omega} \end{array} & [S | -] =: E \\
 \downarrow p & \begin{array}{c} \nwarrow \bar{\eta} \quad \nearrow \bar{\omega} \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} & \downarrow q \\
 \pi_1(K, x_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \xleftarrow{\varphi} \end{array} & [S | R] := F
 \end{array}$$

$\frac{\text{Kantenzüge in } (K, x_0)}{\text{simpliciale Homotopie}} \quad \quad \quad \frac{\text{Wörter über } S}{\text{Relationen } R}$

Beweis: (a) Wir konstruieren zunächst den Monoidhomomorphismus

$$\eta : P(K, x_0, x_0) \rightarrow [S | -] =: E.$$

Für jede orientierte Kante ab mit $\{a, b\} \in K$ definieren wir

$$\eta(ab) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \{a, b\} \in T, \\ s_{ab} & \text{falls } \{a, b\} \notin T. \end{cases}$$

Zu jedem Kantenzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K bilden wir das Produkt

$$\eta(v_0 v_1 \dots v_n) := \eta(v_0 v_1) \eta(v_1 v_2) \cdots \eta(v_{n-1} v_n).$$

Da K keine 2-Simplizes hat, sind simpliziale Homotopien nur von der Form $uvu \approx uu \approx u$ oder $uvv \approx uv$ oder $uuv \approx uv$. In allen drei Fällen ist die Komposition $\bar{\eta} = q \circ \eta$ invariant unter simplizialen Homotopien. Somit induziert $\bar{\eta}$, wie behauptet, den Gruppenhomomorphismus

$$\psi : \pi_1(K, x_0) \rightarrow F : [w] \mapsto [\eta(w)].$$

(b) Zu jeder Ecke $a \in \Omega(K)$ existiert in T genau ein gekürzter Kantenzug w_a von x_0 nach a . Wir definieren damit $\omega(s_{ab}) = w_{ab} := w_a * ab * \overline{w_b}$. Für $\{a, b\} \in T$ gilt $w_{ab} \approx x_0$. Für $\{a, b\} \in K$ gilt $w_{ab} w_{ba} \approx x_0$. Somit induziert $\bar{\omega} = p \circ \omega$ den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : F := [S | R] \rightarrow \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [w_{ab}].$$

(c) Surjektivität: Damit gilt $\eta(w_{ab}) = \eta(ab) = s_{ab}$, also ist ψ surjektiv.

(d) Injektivität: Wir zeigen, dass ψ injektiv ist, also $\text{Ker}(\psi) = \{[x_0]\}$.

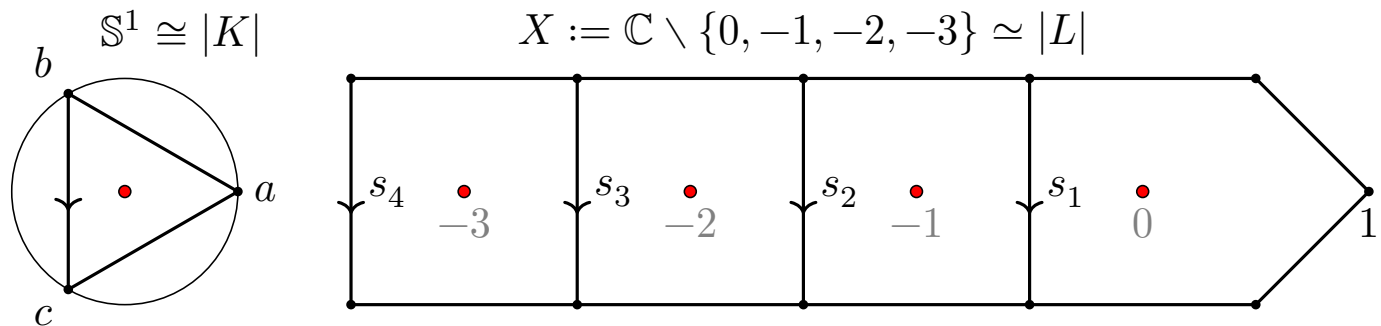
Sei $w = v_0 v_1 \dots v_n$ ein geschlossener Kantenzug in (K, x_0) mit $\eta(w) \equiv e$. Wir konstruieren eine simpliziale Homotopie $w \approx x_0$ durch Induktion über die Anzahl N der Kanten in $K \setminus T$, also die Länge des Wortes $\eta(w)$.

Im Falle $N = 0$ liegt w im Baum T , ist also zusammenziehbar (L6c).

Im Falle $N \geq 1$ finden wir $w = w_1 * ab * w_2 * ba * w_3$ mit einer Kante $\{a, b\} \in K \setminus T$, und w_2 verläuft ganz im Baum T . Wir reduzieren den Kantenzug w durch simpliziale Homotopien zu $w_1 w_3$.

QED

Die simpliziale Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$ können wir leicht ablesen, das heißt wie oben erklärt durch Erzeuger und Relationen präsentieren. Damit lassen sich sofort erste interessante Beispiele berechnen:



Die Fundamentalgruppe können wir nun simplizial berechnen:

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow[\text{L2E}]{\cong} \pi_1(|K|, a) \xrightarrow[\text{L6B}]{\cong} \pi_1(K, a) \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \langle s_{bc} \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(X, 1) \xrightarrow[\text{L2I}]{\cong} \pi_1(|L|, 1) \xrightarrow[\text{L6B}]{\cong} \pi_1(L, 1) \xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid - \rangle$$

Beispiel: (1) Wir erklären den Abbildungsgrad $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, diesmal jedoch simplizial. Hierzu triangulieren wir die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \cong |K|$ durch den Simplizialkomplex $K = \langle \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\} \rangle$, wie oben gezeigt. Als Spannbaum wählen wir (willkürlich) $T = \langle \{a, b\}, \{c, a\} \rangle$. Es bleibt $K \setminus T = \{\{b, c\}\}$. Wir erhalten den Isomorphismus

$$\pi_1(K, a) \cong [s_{bc}, s_{cb} \mid s_{bc}s_{cb} = 1] = \langle s_{bc} \mid - \rangle.$$

Im letzten Schritt wählen wir (nach der üblichen Konvention) eine der beiden Orientierungen, hier $s_{bc} \mapsto +1$ und $s_{cb} \mapsto -1$. Das Gesamtergebnis stimmt dann mit der Umlaufzahl $\deg : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ überein.

(2) Sei $X = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3\}$. Dank Satz L4D wissen wir bereits $\pi_1(X, 1) \cong \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid - \rangle$. Alternativ können wir einen Graphen L affin einbetten, sodass $\iota : |L| \hookrightarrow X$ ein starker Deformationsretrakt ist (L4G). Die obige Abbildung zeigt hierzu eine einfache Möglichkeit. Die gesuchte Fundamentalgruppe ist dann isomorph zur simplizialen Fundamentalgruppe, und diese lesen wir leicht ab.

Korollar L6c: Euler–Charakteristik endlicher Graphen

Seien K und L endliche Graphen. Aus Homöomorphie $|K| \cong |L|$ oder allgemeiner aus Homotopie-Äquivalenz $|K| \simeq |L|$ folgt die Gleichheit $\chi(K) = \chi(L)$ der Euler–Charakteristiken.

Beweis: (a) Zunächst seien K und L zusammenhängend.

$$\begin{aligned} & |K| \simeq |L| \\ \xRightarrow{\text{L2N}} & \pi_1(|K|, a) \cong \pi_1(|L|, b) \\ \xRightarrow{\text{L6D}} & 1 - \chi(K) = 1 - \chi(L) \end{aligned}$$

Die Gruppe $\pi_1(|K|, a)$ ist frei vom Rang $1 - \chi(K)$, ebenso ist $\pi_1(|L|, b)$ frei vom Rang $1 - \chi(L)$. Hieraus folgt $\chi(K) = \chi(L)$, denn der Rang freier Gruppen ist wohldefiniert (L3v), invariant unter Gruppenisomorphismen.

(b) Wir zerlegen in Komponenten, $K = \bigsqcup_{i=1}^n K_i$ und $L = \bigsqcup_{i=1}^n L_i$ mit K_i und L_i zusammenhängend und $|K_i| \simeq |L_i|$ für alle i .

Dank (a) folgt $\chi(K) = \sum_{i=1}^n \chi(K_i) = \sum_{i=1}^n \chi(L_i) = \chi(L)$.

QED

Anwendung: Euler–Charakteristik endlicher Graphen

L616
Erläuterung

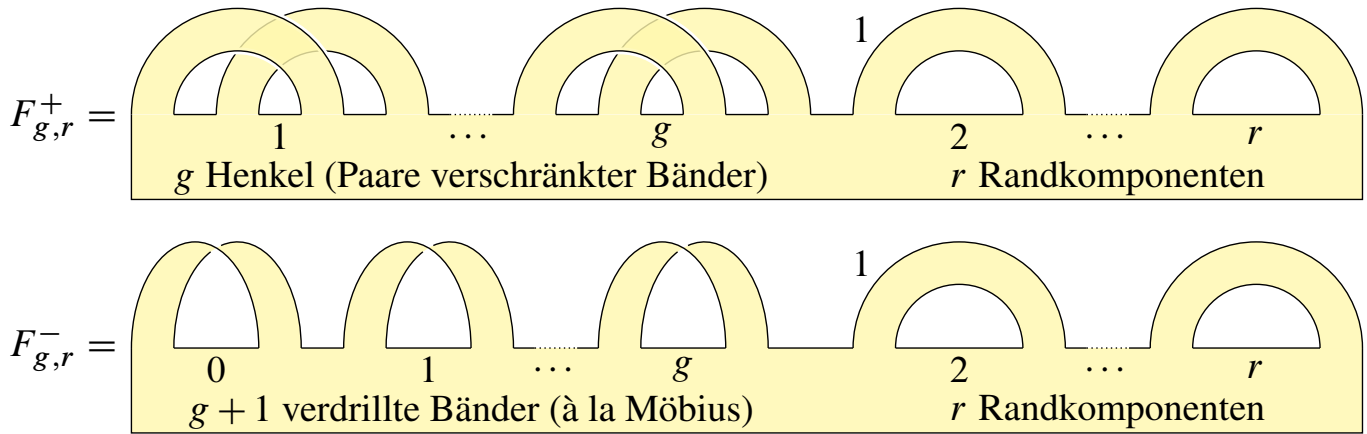
😊 Wir können χ durch Ecken und Kanten leicht abzählen. Invarianz unter Homöomorphismen ist allgemein schwierig. Für Graphen gelingt der direkte Nachweis nur mit Mühe, und schon Homotopie-Äquivalenz ist recht schwierig. Wunderbar elegant gelingt es dank Invarianz von π_1 (L2E, L2N) zusammen mit unserer effizienten Rechnung (L6D, L3v).

Erstaunlicherweise gilt die folgende Umkehrung. Für zshgde Graphen ist die Euler–Charakteristik eine vollständige Homotopie-Invariante!

Übung: (1) Warnung: $X = \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ und $Y = \{*\} \sqcup (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ haben zwar dieselbe Euler–Charakteristik, sind aber nicht homotopie äquivalent.

(2) Genau dann sind zwei zusammenhängende (!) endliche Graphen K und L homotopie-äquivalent, wenn die Gleichheit $\chi(K) = \chi(L)$ gilt. Die zur Umkehrung „ $\Leftarrow$ “ nötige Konstruktion gelingt wie folgt:

(3) Allgemein: Sei K ein beliebiger Graph und $T \subseteq K$ ein Spannwald. Dann ist die Zusammenschlagung $|K| // |T|$ ein Bouquet von Kreislinien, und der Quotient $q : |K| \twoheadrightarrow |K| // |T|$ ist eine Homotopie-Äquivalenz.



Satz L6H: Fundamentalgruppe kompakter Flächen

Seien $g, r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 1$. Dann ist $\pi_1(F_{g,r}^\pm, x_0)$ frei über $1 - \chi$ Erzeugern:

$$\begin{aligned} \pi_1(F_{g,r}^+, x_0) &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle, & \chi(F_{g,r}^+) &= 2 - 2g - r, \\ \pi_1(F_{g,r}^-, x_0) &\cong \langle c_0, c_1, \dots, c_g, d_2, \dots, d_r \mid - \rangle, & \chi(F_{g,r}^-) &= 1 - g - r. \end{aligned}$$

😊 Die Euler-Charakteristik ist demnach eine topologische Invariante für berandete Flächen unter Homöomorphismen, allgemeiner sogar unter Homotopie-Äquivalenz, wie oben schon für Graphen gesehen.

Aufgabe: Wie würden Sie diese Berechnung / den Beweis angehen? Welche Werkzeuge für Präsentationen haben Sie schon zur Hand?

Simplizialer Beweis: Die Fläche $F = F_{g,r}^\pm$ enthält einen geeigneten Graphen $|K|$ als starken Deformationsretrakt, mit Spannbaum T und je einer Kante $s_1, \dots, s_n \in K \setminus T$ für jedes Band der Fläche im obigen Modell. Aus $(\iota, \rho) : |K| \simeq F$ folgt $(\iota_\#, \rho_\#) : \pi_1(|K|, x_0) \cong \pi_1(F, x_0)$ dank L2H. Dank Satz L6D lesen wir daran die genannte freie Gruppe ab.

Dualer Beweis: Wir realisieren die Fläche $F = F_{g,r}^\pm$ kubisch im $\mathbb{R}^3$. Für die Fundamentalgruppe nutzen wir polygonale Wege modulo polygonaler Homotopie wie in §L4. Auf jedem der Bänder $1, \dots, n$ wählen wir einen Schnitt $S_1, \dots, S_n \subseteq F$ von Rand zu Rand. Ihr Komplement $F \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n)$ ist zusammenziehbar. Der Gruppenisomorphismus $\pi_1(F, x_0) \simeq \langle s_1, \dots, s_n \mid - \rangle$ zählt dann die Übergänge; wir kennen dies von der gelochten Ebene L4D und der Wirtinger-Präsentation L4M.

Im ersten Beweis zählen wir Übergänge über Kanten des Graphen $|K|$; diese haben Dimension 1. Im zweiten Beweis zählen wir Durchstoßungen von Wänden transvers zu $|K|$; diese haben Kodimension 1. Beide Beweise ergeben dasselbe, beide sind leicht und lehrreich. Ich präsentiere sie hier parallel, da wir hieran erneut im Keim eine schöne Dualität erkennen, die in der Algebraischen Topologie eine wichtige Rolle spielt.

Dasselbe Phänomen beobachten wir ebenso in den vorigen Beispielen L6E und L6F von Graphen in der Ebene. Wir haben es ebenso bei unserer Diskussion des Satzes von Jordan–Schoenflies bewundert: Die Zyklen des Graphen entsprechen eingezäunten Gebieten des Komplements.

Dies entspricht der Dualität von Fundamentalgruppe und Überlagerung: Wir können entlang der Schnitte aufschneiden und zur universellen Überlagerung verkleben (Kapitel M). Im abelschen Fall gelangen wir zur Poincaré–Dualität von Homologie und Kohomologie. Diese ist ein zentrales Werkzeug der Algebraischen Topologie von Mannigfaltigkeiten.

Berandete Flächen haben freie Fundamentalgruppen.

L620

😊 Wie oben schon für Graphen gilt auch hier die Umkehrung:

Übung: Zwei berandete, kompakte, zshgde Flächen sind genau dann homotopie-äquivalent, wenn sie gleiche Euler–Charakteristiken haben.

Satz L6H: Fundamentalgruppe kompakter Flächen

Die inneren Ränder in obiger Modelldarstellung entsprechen den Erzeugern $d_2, \dots, d_r$. Umlaufen des äußeren Randes entspricht dem Flächenwort $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} d_2 \dots d_r$ bzw. $c_0^2 c_1^2 \dots c_g^2 d_2 \dots d_r$.

Aus $F_{g,1}^\pm$ gewinnen wir die geschlossene Fläche $F_g^\pm$ durch Verkleben des Randes mit einer Kreisscheibe. Für die Fundamentalgruppe folgt

$$\begin{aligned}\pi_1(F_g^+, x_0) &\cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle, \\ \pi_1(F_g^-, x_0) &\cong \langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0^2 c_1^2 \dots c_g^2 = 1 \rangle.\end{aligned}$$

Beweis: Der Randweg entspricht dem Wort w in $\pi_1(F_g^\pm, x_0)$ und wird zusammenziehbar als Rand der angeklebten Kreisscheibe, siehe L6M. QED

Satz L61: Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Sei K ein SKomplex, $x_0 \in \Omega$ eine Ecke und $T \subseteq K$ ein Spannbaum. Dann haben wir die Präsentation $(\psi, \varphi) : \pi_1(K, x_0) \cong G := [S | R]$ mit

$S = \{s_{ab} \mid \{a, b\} \in K\}$ als Menge der Erzeuger und den Relationen
 $R = \{s_{ab} \mid \{a, b\} \in T\} \cup \{s_{ab}s_{ba} \mid \{a, b\} \in K\} \cup \{s_{ab}s_{bc}s_{ca} \mid \{a, b, c\} \in K\},$

$\varphi : G \rightarrow \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [(x_0 \xrightarrow{T} a) * ab * (b \xrightarrow{T} x_0)]$ und

$\psi : \pi_1(K, x_0) \rightarrow G : [v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n] \mapsto [s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \dots s_{v_{n-1} v_n}].$

😊 Für jeden endlichen Komplex K wird $\pi_1(K, x_0)$ so endlich präsentiert.

Die Vereinbarung $s_{ab} = 1$ für $\{a, b\} \in T$ ist hier Teil der Relationen R . Zwecks bequemer Schreibweise geben wir *alle* Kanten als Erzeuger an, auch wenn viele redundant sind und durch Relationen gelöscht werden.

Die zweite Menge der Relationen folgt aus der dritten und ersten:

Dank $K_0 \subseteq T \subseteq K$ liegt jede Ecke a im Spannbaum, also gilt $s_{aa} = 1$.

Für jede Kante $\{a, b\} \in K$ folgt $\{a, b, a\} \in K$ und somit $s_{ab}s_{ba}s_{aa} = 1$.

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

Wir organisieren die Konstruktion entlang der beidseitigen Quotienten:

$$\begin{array}{ccc}
 P(K, x_0, x_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\eta} \\ \xleftarrow{\omega} \end{array} & [S | -] =: E \\
 \downarrow p & \begin{array}{c} \nearrow \bar{\eta} \\ \searrow \bar{\omega} \end{array} & \downarrow q \\
 \pi_1(K, x_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \xleftarrow{\varphi} \end{array} & [S | R] := G
 \end{array}$$

$\frac{\text{Kantenzüge in } (K, x_0)}{\text{simpliziale Homotopie}}$
 $\frac{\text{Wörter über } S}{\text{Relationen } R}$

Der Satz ist vollkommen explizit und gebrauchsfertig formuliert. Zum Beweis genügt geduldiges Nachrechnen der Behauptungen:

Aufgabe: Die Homomorphismen (a) ψ und (b) φ sind wohldefiniert, denn die im Start geforderten Relationen sind auch im Ziel erfüllt. Nach Konstruktion gilt (c) $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$ und (d) $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\pi_1(K, x_0)}$.

Versuchen Sie es unbedingt selbst. Sie können hier viel lernen, denn viele Isomorphismen entstehen genau so! Ich führe dies für Sie vorbildlich aus.

Beweis: (a) Wir haben den Monoidhomomorphismus

$$\eta : P(K, x_0, x_0) \rightarrow [S | -] : v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n \mapsto s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \dots s_{v_{n-1} v_n}.$$

Für $\{a, b, c\} \in K$ gilt links Homotopie $abc \approx ac$ und rechts Kongruenz $s_{ab}s_{bc} \equiv s_{ac}$. Somit induziert $\bar{\eta} = q \circ \eta$ den Gruppenhomomorphismus

$$\psi : \pi_1(K, x_0) \rightarrow G : \psi([w]) = [\eta(w)].$$

(b) Zu jeder Ecke $a \in \Omega(K)$ existiert in T genau ein gekürzter Kantenzug w_a von x_0 nach a . Daher haben wir den Monoidhomomorphismus

$$\omega : [S | -] \rightarrow P(K, x_0, x_0) : s_{ab} \mapsto w_{ab} := w_a * ab * \overline{w_b}.$$

Jede Relation aus R übersetzt sich in eine simpliziale Homotopie in K :

(0) Für $\{a, b\} \in T$ liegt w_{ab} in T , also $w_{ab} \approx x_0$. (L6c)

(1) Für $\{a, b\} \in K$ gilt $w_{ba} = \overline{w_{ab}}$, also $w_{ab} * w_{ba} \approx x_0$.

(2) Für $\{a, b, c\} \in K$ gilt $w_{ab}w_{bc}w_{ca} \approx w_a ab \overline{w_b} w_b bc \overline{w_c} w_c ca \overline{w_a} \approx x_0$.

Somit induziert $\bar{\omega} = p \circ \omega$ den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : [S | R] \rightarrow \pi_1(K, x_0) : [s_{ab}] \mapsto [w_{ab}].$$

Präsentation der simplizialen Fundamentalgruppe

L624

(c) Wir zeigen $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$. Unsere Konstruktion garantiert:

$$\eta \circ \omega : s_{ab} \mapsto w_{ab} = w_a * ab * \overline{w_b} \mapsto \eta(w_a) s_{ab} \eta(\overline{w_b}) \equiv s_{ab}$$

Der Kantenzug w_a verläuft ganz in T , hier gilt $s_{ij} \equiv e$ für alle $\{i, j\} \in T$. Das bedeutet $\psi \circ \varphi : [s_{ab}] \mapsto [w_{ab}] \mapsto [s_{ab}]$, also $\psi \circ \varphi = \text{id}_G$.

(d) Wir zeigen $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\pi_1(K, x_0)}$. Für jeden Kantenzug w in (K, x_0) gilt:

$$\begin{aligned} \omega \circ \eta : w = v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n &\mapsto s_{v_0 v_1} s_{v_1 v_2} \dots s_{v_{n-1} v_n} \\ &\mapsto w_{v_0} v_0 v_1 \overline{w_{v_1}} w_{v_1} v_1 v_2 \overline{w_{v_2}} \dots w_{v_{n-1}} v_{n-1} v_n \overline{w_{v_n}} \equiv w \end{aligned}$$

Die eingefügten Hilfswege im Spannbaum T kürzen sich paarweise weg. An den beiden Rändern gilt zudem $v_0 = x_0 = v_n$, also $w_{v_0} = x_0 = \overline{w_{v_n}}$. Das bedeutet $\varphi \circ \psi : [w] \mapsto [w]$, also $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\pi_1(K, x_0)}$.

Wie behauptet ist (ψ, φ) ein Gruppenisomorphismuspaar.

QED

😊 Satz und Beweis sind idealtypisch für Isomorphie. Bitte gehen Sie alles sorgsam durch, dann formulieren Sie es noch einmal selbst.

Beispiel: Satz L6I beinhaltet Satz L6C über Bäume $K = T$:

$$\pi_1(K, x_0) \cong [s_{ab} : \{a, b\} \in K \mid s_{ab} : \{a, b\} \in T] \cong \{1\}.$$

Beispiel: Satz L6I beinhaltet ebenso Satz L6D über Graphen $K \supseteq T$:

$$\begin{aligned} \pi_1(K, x_0) &\cong [s_{ab} : \{a, b\} \in K \mid s_{ab} : \{a, b\} \in T, s_{ab}s_{ba} : \{a, b\} \in K] \\ &\cong [s_{ab} : \{a, b\} \in K \setminus T \mid s_{ab}s_{ba} : \{a, b\} \in K \setminus T]. \end{aligned}$$

Stabilisierung dank simplizialer Approximation (Satz I4J).

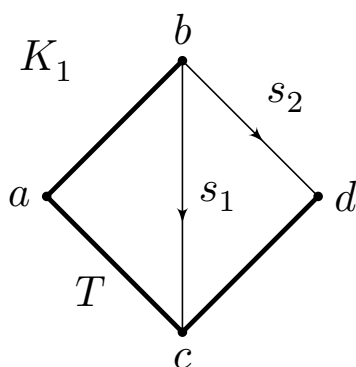
Inklusion der Skelette induziert folgende Homomorphismen:

$$\begin{aligned} K_{\leq 0} &\xrightarrow{\iota_0} K_{\leq 1} \xrightarrow{\iota_1} K_{\leq 2} \xrightarrow{\iota_2} K_{\leq 3} \longrightarrow \dots \longrightarrow K \\ \pi_0(K_{\leq 0}) &\xrightarrow{\pi_0(\iota_0)} \pi_0(K_{\leq 1}) \xrightarrow{\cong} \pi_0(K_{\leq 2}) \xrightarrow{\cong} \pi_0(K_{\leq 3}) \xrightarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong} \pi_0(K) \\ \pi_1(K_{\leq 1}) &\xrightarrow{\pi_1(\iota_1)} \pi_1(K_{\leq 2}) \xrightarrow{\cong} \pi_1(K_{\leq 3}) \xrightarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong} \pi_1(K) \end{aligned}$$

Ausführlicher gesagt: Die Komponenten $\pi_0(|K|) = \pi_0(K)$ hängen nur vom 1-Skelett $K_{\leq 1}$ ab (I3G): Wir können Punkte ins 0-Skelett schieben und Wege ins 1-Skelett. Vornehm gesagt: $\pi_0(\iota_0)$ ist surjektiv, $\pi_0(\iota_1)$ und alle folgenden sind bijektiv.

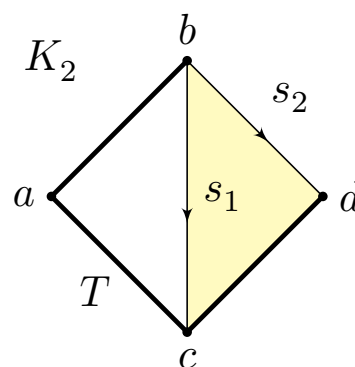
Entsprechend: Fundamentalgruppe $\pi_1(|K|, x_0) \cong \pi_1(K, x_0)$ hängt nur vom 2-Skelett $K_{\leq 2}$ ab (L6B): Wir können Wege ins 1-Skelett $K_{\leq 1}$ schieben und Homotopien ins 2-Skelett $K_{\leq 2}$. Vornehm gesagt: $\pi_1(\iota_1)$ ist surjektiv, $\pi_1(\iota_2)$ und alle folgenden sind bijektiv.

Satz L6I präzisiert dies: Das 1-Skelett $K_{\leq 1}$ ist ein Graph und die Gruppe $\pi_1(K_{\leq 1}, x_0)$ frei (L6D). Diese liefert die Erzeuger, dank Surjektivität von $\pi_1(\iota_1) : \pi_1(K_{\leq 1}, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(K_{\leq 2}, x_0)$. Jedes Dreieck $\Delta \in K_{\leq 2} \setminus K_{\leq 1}$ liefert eine Relation, und diese erzeugen den Kern $\text{Ker } \pi_1(\iota_1)$.



$$\pi_1(K_1, a) \cong \langle s_1, s_2 \mid - \rangle$$

$$abca \leftrightarrow s_1, \quad abdca \leftrightarrow s_2$$

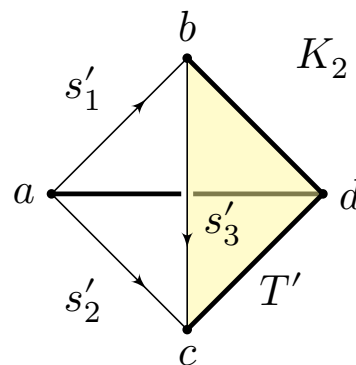
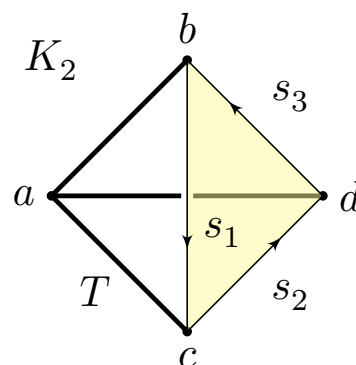
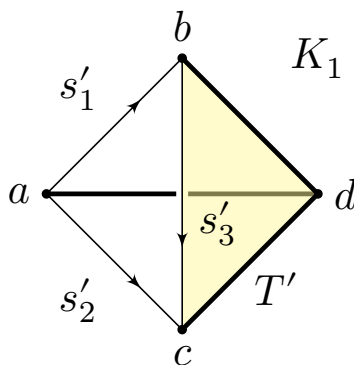
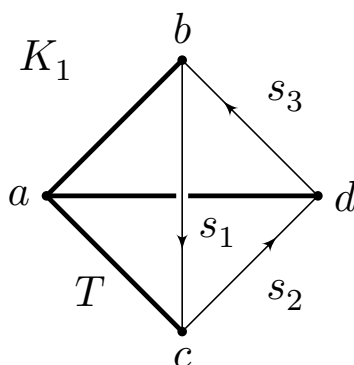
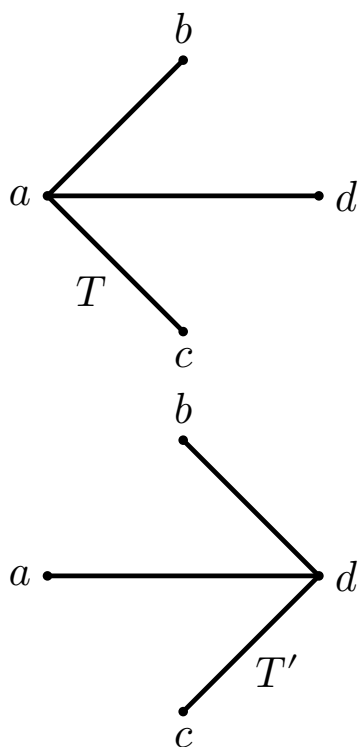


$$\pi_1(K_2, a) \cong \langle s_1, s_2 \mid s_1 = s_2 \rangle$$

$$abca \approx abdca \leftrightarrow s_1 = s_2$$

Wir bauen das obige Beispiel schrittweise auf: Für den Spannbaum T ist die Gruppe $\pi_1(T, a) = \{1\}$ trivial (L6c). Der Graph $K_1 \supseteq T$ fügt zwei Kanten ein; jede liefert einen freien Erzeuger (L6d). Der Komplex $K_2 \supseteq K_1$ fügt ein Dreieck hinzu; dieses liefert eine Relation (L6i).

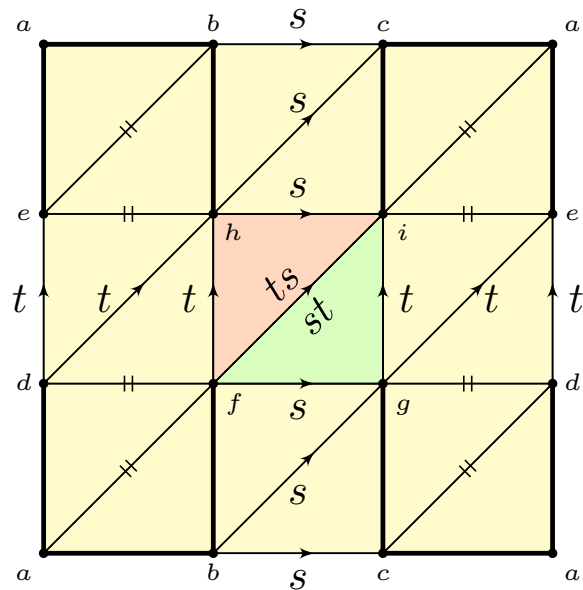
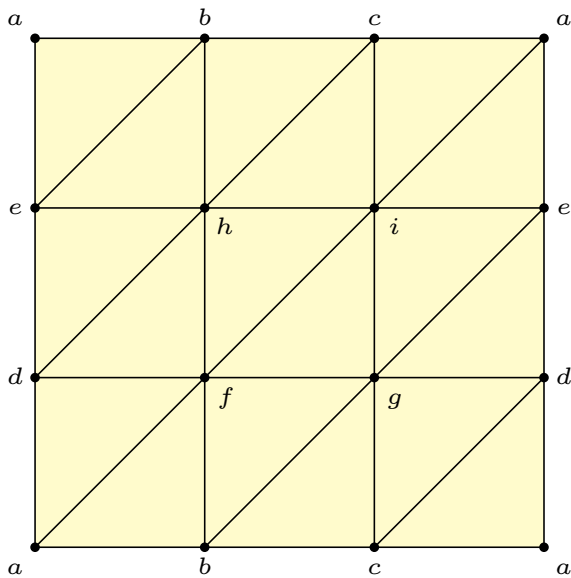
Konkretes Beispiel: In (K_1, a) gilt $\psi([abcba]) = s_{ab}s_{bc}s_{bc}s_{ba} = s_1s_1^{-1} = 1$ und $\psi([abcdba]) = s_{ab}s_{bc}s_{cd}s_{db}s_{ba} = s_1s_2^{-1} \neq 1$. In (K_2, a) hingegen ist auch die zweite Schleife zusammenziehbar (über das Dreieck).



⚠ Zwei verschieden gewählte Spannbäume T und T' liefern zwei verschiedene Präsentationen derselben Gruppe! Beide können wir leicht ineinander umrechnen dank Tietze-Transformationen (L3s).

Aufgabe: Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, x_0)$, diesmal simplizial.
(Wir haben dies bereits als Produktgruppe abgeleitet, siehe L20.)

Lösung: Wir nutzen die Neun-Ecken-Triangulierung des Torus.



Diese Rechnung zeigt $\pi_1(K, a) \cong [S | R] \cong \langle s, t | st = ts \rangle \cong \mathbb{Z}^2$.

Beispiel: Fundamentalgruppe des Torus

L630
Erläuterung

Ausführlich: Wir wählen einen Spannbaum $T \subseteq K$, hier fett markiert. Damit lesen wir die Präsentation $\pi_1(K, a) \cong [S | R]$ ab. Diese wollen wir vereinfachen. Zu jeder Kante $\{x, y\} \in K \setminus T$ wählen wir eine Orientierung (x, y) und somit einen der beiden Erzeuger s_{xy} ; der andere ist $s_{yx} = s_{xy}^{-1}$.

Die Erzeuger zu Kanten $\{x, y\} \in T$ des Spannbaums erfüllen $s_{xy} = 1$, können also weggelassen werden. Das betrifft hier die acht Kanten $s_{ab} = s_{ac} = s_{ad} = s_{ae} = s_{bf} = s_{bh} = s_{cg} = s_{ci} = 1$. Jedes Dreieck definiert eine Relation. Aus dem Dreieck $\{a, b, f\}$ folgt $s_{af} = 1$, ebenso ergibt es $s_{df}, s_{be}, s_{eh}, s_{cd}, s_{dg}, s_{ai}, s_{ei}$. Damit löschen wir weitere 8 Kanten. Von den insgesamt 27 Kanten in K werden diese 16 Kanten auf 1 abgebildet.

Wir setzen $s_{bc} := s$ und finden $s_{bc} = s_{bg} = s_{fg} = s_{hc} = s_{hi} = s$ (mittlere Spalte). Wir setzen $s_{de} := t$ und finden $s_{de} = s_{dh} = s_{fh} = s_{ge} = s_{gi} = t$ (mittlere Zeile). Das vorletzte Dreieck $\{f, g, i\} \in K$ erzwingt $s_{fi} = st$. Bislang sind s, t noch frei, müssen also keine Relation erfüllen. Das letzte Dreieck $\{f, h, i\} \in K$ erzwingt $s_{fi} = ts$, also die Relation $st = ts$.

Wir erhalten wir vollkommen explizit den Gruppenisomorphismus

$$\begin{array}{lll} \pi_1(K, a) \cong [S | R] & \simeq \langle s, t | st = ts \rangle \simeq \mathbb{Z}^2 : \\ s_{ab}, s_{ac}, s_{ad}, s_{ae}, s_{bf}, s_{bh}, s_{cg}, s_{ci} & \mapsto 1 & \mapsto (0, 0) \\ s_{af}, s_{df}, s_{be}, s_{eh}, s_{cd}, s_{dg}, s_{ai}, s_{ei} & \mapsto 1 & \mapsto (0, 0) \\ s_{bc}, s_{bg}, s_{fg}, s_{hc}, s_{hi} & \mapsto s & \mapsto (1, 0) \\ s_{de}, s_{dh}, s_{fh}, s_{ge}, s_{gi} & \mapsto t & \mapsto (0, 1) \\ s_{fi} & \mapsto st & \mapsto (1, 1) \end{array}$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus ist demnach

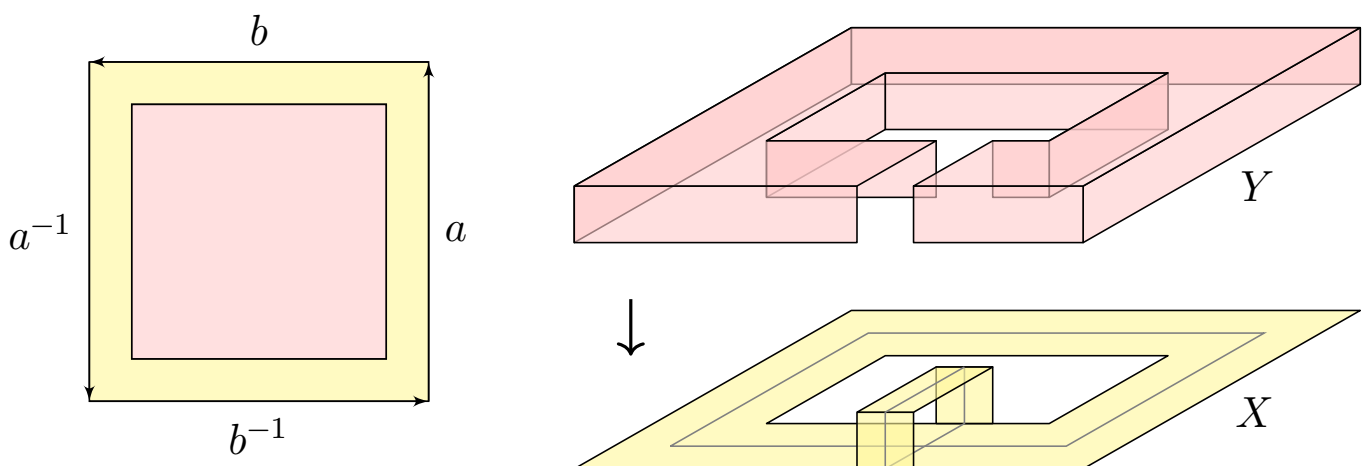
$$\mathbb{Z}^2 \simeq \pi_1(K, a) : (k, \ell) \mapsto s^k t^\ell \mapsto [abca]^k [adea]^\ell$$

Für $K' = K \setminus \{\{f, h, i\}\}$ haben wir $\pi_1(K', a) = \langle s, t | - \rangle$ berechnet. Dies können wir alternativ geometrisch sehen, sogar noch leichter: Der Randkomplex $L = \langle \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{e, a\} \rangle$ ist ein Graph, dank L6D lesen wir $\pi_1(L, a) \cong \langle s, t | - \rangle$ ab.

Beispiel: Fundamentalgruppe des Torus

L632

Vertraute geometrische Darstellung: Die rote 2-Zelle schließt die Fläche!

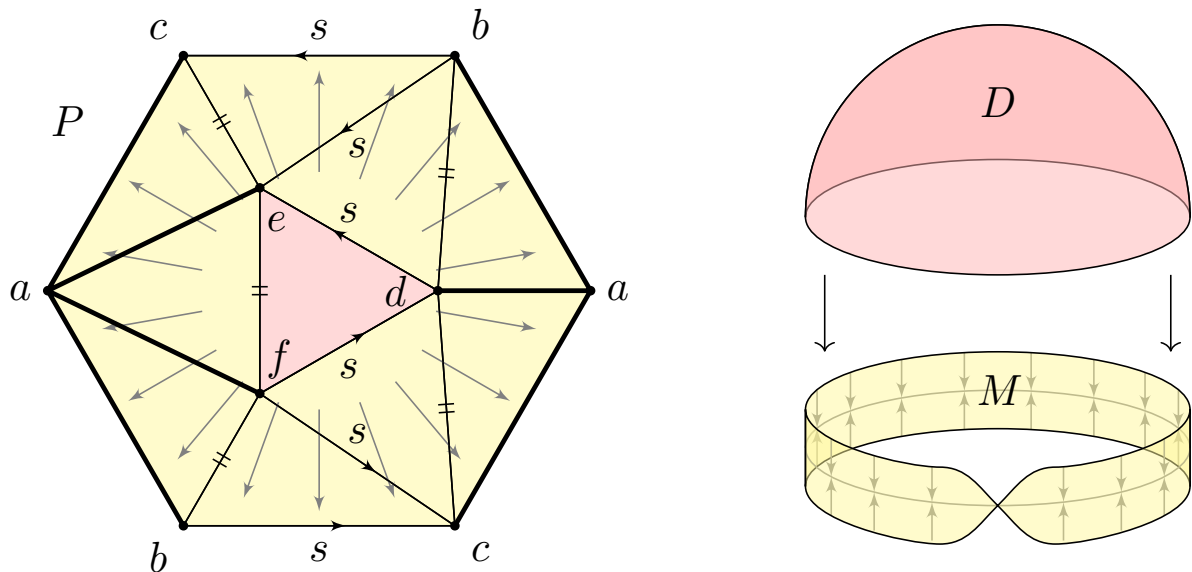


Die Inklusion $i : |L| \hookrightarrow |K'|$ ist ein starker Deformationsretrakt, als Retraktion $r : |K'| \twoheadrightarrow |L|$ dient uns hier die radiale Projektion, und $(i_\#, r_\#) : \pi_1(L, a) \cong \pi_1(K', a)$ zeigt $s_{fi}s_{ih}s_{hf} \approx sts^{-1}t^{-1}$.

Die Inklusion $j : |K'| \hookrightarrow |K|$ fügt das letzte Dreieck $\{f, h, i\}$ hinzu und damit diese Relation. Diese Beobachtung vereinfacht die Berechnung! Wir werden diese Technik im Folgenden perfektionieren.

Aufgabe: Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0)$, hier simplizial.

Lösung: Wir nutzen die Sechs-Ecken-Triangulierung (aus den 12 Ecken eines Ikosaeders durch Identifikation gegenüberliegender Punkte):



Wir erkennen das Möbius-Band $M = P \setminus \{\{d, e, f\}\}$ plus Kreisscheibe. Diese Rechnung zeigt $\pi_1(\mathbb{RP}^2, a) \cong \pi_1(P, a) \cong \langle s \mid s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$.

Simpliziale Sichtweise: Für $P \supseteq M$ wählen wir die Kanten des Sterns um den Punkt a als Spannbaum $T = \langle \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\} \rangle$. Das impliziert die Relationen $s_{ab} = s_{ac} = s_{ad} = s_{ae} = s_{bf} = 1$.

Die Kante $\{b, d\}$ fügt einen neuen Erzeuger hinzu, doch dieser wird durch das Dreieck $\{a, b, d\}$ gelöscht. Ebenso ergeht es den Kanten $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$ und schließlich $\{e, f\}$. Damit löschen wir weitere 5 Kanten.

Die Kante $\{b, c\}$ fügt einen neuen Erzeuger s hinzu. Die Kante $\{b, e\}$ ist hierzu äquivalent aufgrund des Dreiecks $\{b, c, d\}$. Ebenso die Kanten $\{d, e\}$, $\{f, c\}$ und $\{f, d\}$. Wir erhalten so aus Satz L6I den Isomorphismus

$$\psi_M : \pi_1(M, a) \simeq \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Der Weg $\gamma = |ade fda|$ umläuft den Rand des zentralen Dreiecks einmal, und wir lesen $\psi_M(\gamma) = s^2$ ab. In $P = M \cup \{\{d, e, f\}\}$ wird genau dies als Relation eingefügt. Wir erhalten so aus Satz L6I den Isomorphismus

$$\psi_P : \pi_1(P, a) \simeq \langle s \mid s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2.$$

Geometrische Sichtweise: Der Komplex $M = P \setminus \{\{d, e, f\}\}$ ohne das zentrale Dreieck trianguliert das Möbius-Band, wie oben skizziert.

Hierin ist $S = \langle \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\} \rangle$ die Seele $|S| \cong \mathbb{S}^1$ des Bandes. Für die Kreislinie wissen wir $\pi_1(S, a) \cong \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$ mit dem freien Erzeuger $s = [abca]$. Zudem sehen wir die starke Deformationsretraktion $(\rho, \iota) : |M| \simeq |S|$, also $\rho_\# : \pi_1(M, a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S, a) \cong \langle s \mid - \rangle$.

Der Rand des Möbius-Bandes ist $\partial M = \langle \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, d\} \rangle$.

Der Weg $\gamma = |adefda|$ umläuft den Rand genau einmal, doch

$\rho_\#([adefda]) = [abcabca] = s^2$ umläuft die Seele zweimal.

In $P = M \cup \{\{d, e, f\}\}$ wird dies als Relation eingefügt:

$[abcabca] = [adefda] = 1$ in $\pi_1(P, a)$. Wir erhalten so die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{RP}^2, a) \cong \pi_1(P, a) \cong \langle s \mid s^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2$.

😊 Die simpliziale, lokale Sichtweise gelingt immer und bietet eine verlässliche, universelle Methode: das beliebte „Schema F“. Die geometrische, globale Sichtweise ist raffinierter und effizienter.

😊 Wir haben nun zwei Flächen wunderbar konkret durchgerechnet. Wenn Sie möchten, können Sie selbst weitere Beispiele präsentieren.

Was lernen wir daraus? Zunächst einmal, dass die simpliziale Präsentation immer gelingt. Für große Simplizialkomplexe ist diese Arbeit zwar etwas mühsam, doch in günstigen Beispielen wie oben lassen sich viele redundante Erzeuger leicht erkennen und löschen.

Zweitens lernen wir daran, dass die geometrische Sichtweise dasselbe Ergebnis liefert mit deutlich weniger Mühe. Das liegt ganz einfach daran, dass wir viele Simplizes bequem zu einer Zelle zusammenfassen. Satz L6p perfektioniert das „Anheften einer Zelle“.

Gewappnet mit diesen lehrreichen Vorbereitungen können wir nun zu *jeder* geschlossenen Fläche die Fundamentalgruppe präsentieren. Der folgende Satz enthält insbesondere die beiden vorigen Beispiele $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ und $\mathbb{RP}^2$. Da Sie diese beiden detailliert verstehen, wirkt der allgemeine Fall hoffentlich natürlich und weniger wunderbar.

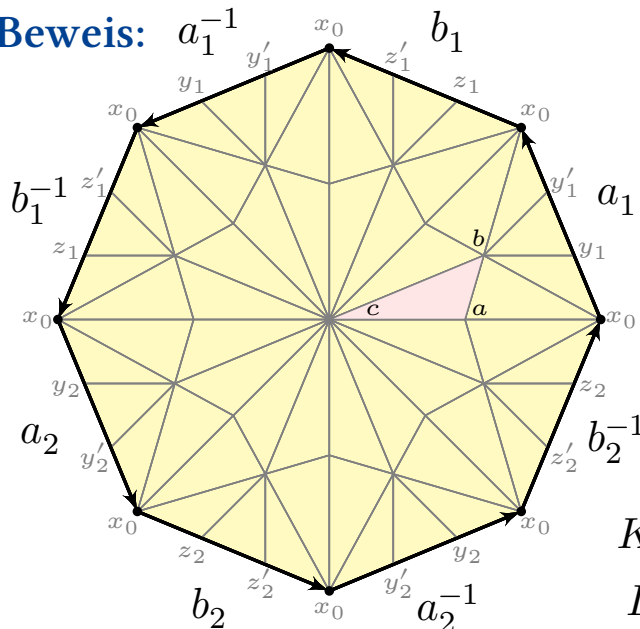
Satz L6M: Flächengruppen

Für die geschlossenen Flächen $F_g^\pm$ haben wir Gruppenisomorphismen

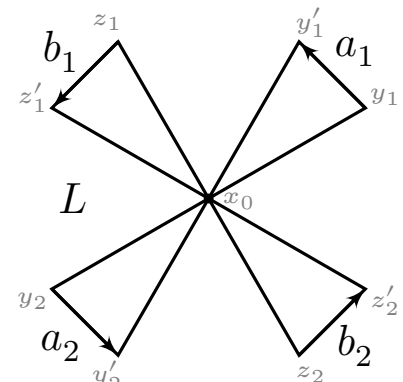
$$\pi_1(F_g^+, x_0) \cong G_g^+ := \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle,$$

$$\pi_1(F_g^-, x_0) \cong G_g^- := \langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0 c_0 c_1 c_1 \dots c_g c_g = 1 \rangle.$$

Beweis:



$$|(K, L)| \cong (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1) / \langle w \rangle$$



$$K' = K \setminus \{\{a, b, c\}\}$$

$$L \hookrightarrow K', |L| \simeq |K'|$$

Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

Beweis: Wir betrachten die Fläche $F = \mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ im Polygonmodell (K3E) mit Flächenwort $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ der Länge $n = 4g$. Der Fall $w = c_0 c_0 \dots c_g c_g$ mit $n = 2 + 2g$ ist analog. Wir realisieren $\mathbb{D}^2$ als n -Eck; jede Randkante unterteilen wir in drei Teilintervalle; das Innere unseres n -Ecks unterteilen wir ausreichend fein wie oben skizziert. Wir erhalten den Simplicialkomplex (K, L) mit $|K| \cong \mathbb{D}^2 / \langle w \rangle$ und $|L| \cong \mathbb{S}^1 / \langle w \rangle$.

Wir folgen nicht „Schema F“, sondern gehen geschickt geometrisch vor. Der Komplex L ist ein Graph: Alle Eckpunkte des n -Ecks werden in $|L|$ zu einem einzigen Punkt x_0 . Jede der Kanten $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ bildet in L eine Schleife. Daher ist $\pi_1(|L|, x_0)$ frei mit den Erzeugern $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. Das Umlaufen des n -Ecks ergibt unser Flächenwort w in $\pi_1(|L|, x_0)$.

Aus K entfernen wir ein Dreieck $\Delta = \{a, b, c\} \in K$ wie skizziert und erhalten den Teilkomplex $K' = K \setminus \{\Delta\}$. Die Inklusion $|i| : |L| \hookrightarrow |K'|$ erlaubt als Retraktion $r : |K'| \rightarrow |L|$ die radiale Projektion auf den Rand des n -Ecks, entsprechend $\mathbb{S}^1 \xleftarrow{\cong} \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ mit Retraktion $r(z) = z/|z|$. Das Paar $(|i|, r) : |L| \xleftarrow{\cong} |K'|$ ist ein starker Deformations-Retrakt.

Wir schauen genau hin! Die Inklusionen $i : L \hookrightarrow K'$ und $j : K' \hookrightarrow K$ induzieren die folgenden Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid - \rangle &\xrightarrow[\text{L6D}]{\cong} \pi_1(L, x_0) \xrightarrow[\text{L2I}]{\cong} \pi_1(K', x_0) \xrightarrow[\text{L6I}]{\twoheadrightarrow} \pi_1(K, x_0) \\ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} &\longmapsto [w] \longmapsto [w'] \longmapsto 1 \end{aligned}$$

Das Paar $(|i|, r) : |L| \xrightarrow{\simeq} |K'|$ ist ein starker Deformations-Retrakt, induziert also den zugehörigen Gruppenisomorphismus

$$(|i|_{\#}, r_{\#}) : \pi_1(|K'|, x_0) \cong \pi_1(|L|, x_0).$$

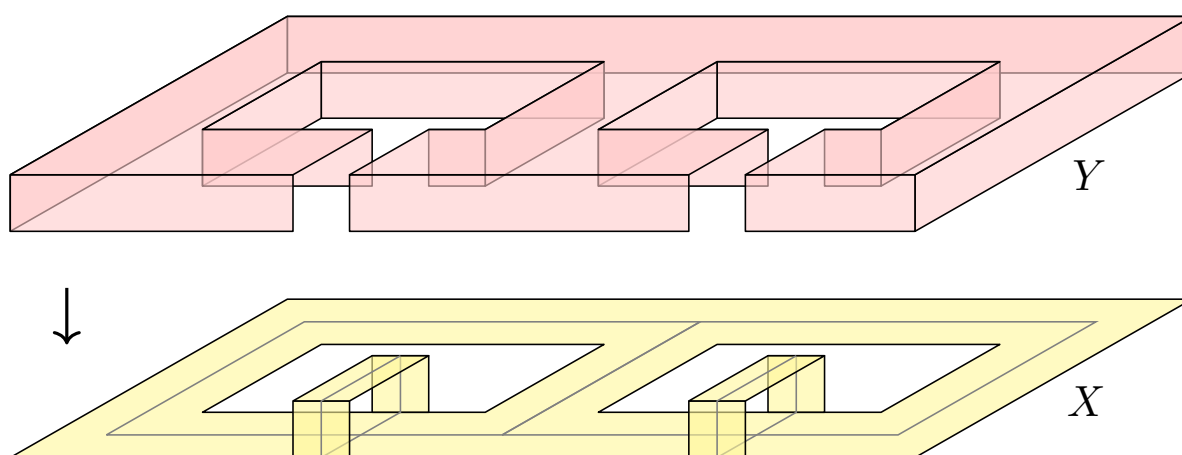
Die Inklusion $j : K' \hookrightarrow K$ induziert den Homomorphismus $j_{\#} : \pi_1(K', x_0) \rightarrow \pi_1(K, x_0)$. Er ist surjektiv, denn es kommt nur ein Dreieck und damit eine Relation hinzu (L6I): Der Kantenzug $w' = x_0 a b c a x_0$ wird nullhomotop. Dank r sehen wir $w' \approx w$.

Beim Übergang von K' zu K fügt das zusätzliche Dreieck Δ die Relation w' hinzu. Das beweist die behauptete Präsentation. QED

Fundamentalgruppen geschlossener Flächen

L640

Vertraute geometrische Darstellung: Die rote 2-Zelle schließt die Fläche!



Dieses Argument gilt für alle geschlossenen Flächen: Wie in obiger Abbildung zerlegen wir $F_g^{\pm} = X \cup Y$ in zwei berandete Flächen $X \cong F_{g,1}^{\pm}$ und $Y \cong \mathbb{D}^2$. Der gemeinsame Rand $X \cap Y = \partial X = \partial Y$ stellt in $\pi_1(X, x_0)$ das Flächenwort w dar (L6H). Hingegen ist der Rand in $Y \cong \mathbb{D}^2$ zusammenziehbar. Wir erhalten hieraus $\pi_1(F_g^{\pm}, x_0)$ wie in Satz L6M.

$$\begin{aligned} H_g^+ &:= (G_g^+)_{\text{ab}} = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle_{\text{ab}} \\ &= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_i, a_j] = [a_i, b_j] = [b_i, b_j] = 1, [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle \\ &= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_i, a_j] = [a_i, b_j] = [b_i, b_j] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned}$$

$$(h, h^{-1}) : \mathbb{Z}^{2g} \xrightarrow{\sim} (G_g^+)_{\text{ab}} : (k_1, \ell_1, \dots, k_g, \ell_g) \mapsto a_1^{k_1} b_1^{\ell_1} \cdots a_g^{k_g} b_g^{\ell_g}$$

$$\begin{aligned} H_g^- &:= (G_g^-)_{\text{ab}} = \langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 = 1 \rangle_{\text{ab}} \\ &= \langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid [c_i, c_j] = 1, c_0^2 c_1^2 \cdots c_g^2 = 1 \rangle \\ &= \langle t, c_0, c_1, \dots, c_g \mid [c_i, c_j] = 1, t = c_0 c_1 \cdots c_g, t^2 = 1, [t, c_i] = 1 \rangle \\ &= \langle t, c_1, \dots, c_g \mid t^2 = 1, [t, c_i] = 1, [c_i, c_j] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g \end{aligned}$$

$$h : \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g \xrightarrow{\sim} (G_g^-)_{\text{ab}} : (k_0 + 2\mathbb{Z}, k_1, \dots, k_g) \mapsto c_0^{k_0} c_1^{k_0+k_1} \cdots c_g^{k_0+k_g}$$

$$h^{-1} : (G_g^-)_{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g : c_0^{\ell_0} c_1^{\ell_1} \cdots c_g^{\ell_g} \mapsto (\ell_0 + 2\mathbb{Z}, \ell_1 - \ell_0, \dots, \ell_g - \ell_0)$$

Abelschmachung der Flächengruppen

L642
Erläuterung

Die Abelschmachung der Präsentation $(h, k) : \langle S \mid R \rangle \cong G$ liefert eine Präsentation der Abelschmachung G_{ab} , siehe L3Q: Es genügt, alle Kommutatorrelationen $[a, b] = 1$ mit $a, b \in S$ hinzuzufügen.

In $(G_g^+)_{\text{ab}}$ wird hierbei die Relation $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$ redundant.

In $(G_g^-)_{\text{ab}}$ können wir den Erzeuger c_0 durch $t = c_0 c_1 \cdots c_n$ ersetzen.

Diese Rechnung gelingt hier *ad hoc* ohne große Schwierigkeiten.

Die Umformungen sind Beispiele von Tietze-Transformationen (L3s).

Aufgabe: Sind zwei dieser Gruppen isomorph? **Lösung:** Nein!

(1) Der Klassifikationssatz endlich erzeugter abelscher Gruppen garantiert, dass die Gruppen $H_g^\pm$ untereinander nicht isomorph sind.

(2) Alternativ gelingt dies direkt: Jede Gruppe H_g^- hat ein Element der Ordnung 2, dies gilt für keine der Gruppen H_g^+ . Innerhalb jeder

der beiden Familien genügt dann Zählen von Homomorphismen:

Wir finden hier $\sharp \text{Hom}(H_g^+, \mathbb{Z}/2) = 2^{2g}$ und $\sharp \text{Hom}(H_g^-, \mathbb{Z}/2) = 2^{g+1}$.

Alternativ hilft $\sharp \text{Hom}(H_g^+, \mathbb{Z}/3) = 3^{2g}$ und $\sharp \text{Hom}(H_g^-, \mathbb{Z}/3) = 3^g$.

(3) Schon $\sharp \text{Hom}(G_g^\pm, \mathbb{Z}/p)$ unterscheidet die Flächengruppen!

Satz L6N: Klassifikation geschlossener Flächen

Für die geschlossenen Flächen $F_g^\pm$ und ihre Gruppen $G_g^\pm = \pi_1(F_g^\pm, *)$ gilt

$$H_g^+ := (G_g^+)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g} \quad \text{und}$$

$$H_g^- := (G_g^-)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g.$$

Für je zwei Paare $(\varepsilon, g) \neq (\delta, h)$ mit $\varepsilon, \delta \in \{\pm\}$ und $g, h \in \mathbb{N}$ folgt daraus:

- 1 $H_g^\varepsilon \not\cong H_h^\delta$ – Die abelsch gemachten Gruppen sind nicht isomorph.
- 2 $G_g^\varepsilon \not\cong G_h^\delta$ – Die Flächengruppen sind nicht isomorph.
- 3 $F_g^\varepsilon \not\cong F_h^\delta$ – Die Flächen sind nicht homotopie-äquivalent.
- 4 $F_g^\varepsilon \not\cong F_h^\delta$ – Die Flächen sind nicht homöomorph.

Beweis: Wir nutzen dankend die zuvor entwickelten Funktoren:

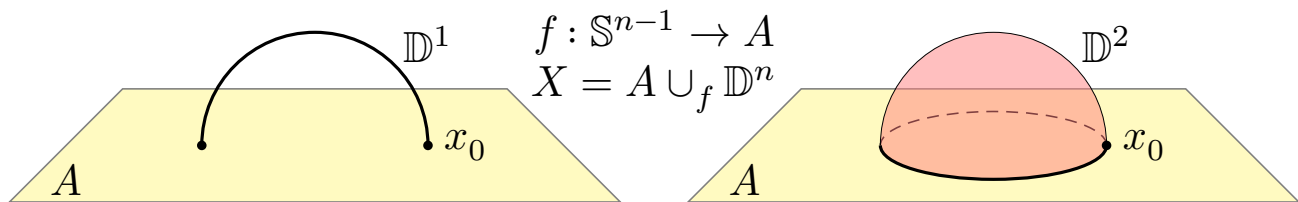
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Top}_* & \xrightarrow[\text{G4L}]{\text{quot}} & \text{hTop}_* & \xrightarrow[\text{L2N}]{\pi_1} & \text{Grp} & \xrightarrow[\text{L3N}]{\text{ab}} & \text{Ab} \\ F_g^\varepsilon \cong F_h^\delta & \implies & F_g^\varepsilon \simeq F_h^\delta & \implies & G_g^\varepsilon \cong G_h^\delta & \implies & H_g^\varepsilon \cong H_h^\delta \end{array}$$

Klassifikation kompakter Flächen

😊 Jeder Funktor erhält Isomorphismen (H4F). Wir übersetzen so unser ursprüngliches Problem in Top_* in immer leichtere Probleme, bis wir es schließlich lösen können. In Ab gelingt es routiniert und erfreulich leicht! Durch Kontraposition erhalten wir die obigen Aussagen (1–4).

😊 Es ist ein bemerkenswerter Glücksfall, dass sich die Flächengruppen leicht berechnen lassen (L6M), und bereits ihre Abelschmachungen (L6N) zur Unterscheidung genügen. Dass alles am Ende so einfach wird, war nicht zu ahnen oder vorherzusehen. Wir freuen uns umso mehr über diesen wunderbaren Erfolg. Das Glück ist mit den Tüchtigen.

😊 Am Anfang dieser Vorlesung haben Sie die Euler-Charakteristik kennengelernt und seitdem gerne als Invariante genutzt. Die Invarianz beweist man am besten mit Homologie in der Algebraischen Topologie. Das musste ich hier als Kredit aufnehmen. Die Fundamentalgruppe bietet eine Alternative, und für diese können wir bereits jetzt alles beweisen! Für die Flächenklassifikation habe ich meinen Kredit damit beglichen.



Satz L6P: Anheften einer Zelle

Sei A wegzshgd und $X = A \cup_f \mathbb{D}^n$ entstehe durch Anheften einer n -Zelle. Als Fußpunkt wählen wir $x_0 = f(e_1)$. Die Inklusion $\iota : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ induziert den Gruppenhomomorphismus $\iota_\# : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

- 1 Für $n = 1$ ist $\iota_\#$ injektiv: $\pi_1(X, x_0)$ entsteht durch Hinzufügen eines freien Erzeugers $[\gamma]$, mit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 über $\mathbb{D}^1$ und in A zurück.
- 2 Für $n = 2$ ist $\iota_\#$ surjektiv: $\pi_1(X, x_0)$ entsteht durch Hinzufügen einer Relation $[\gamma] = 1$, die Schleife $\gamma(t) = f(e^{2\pi i t})$ ist zusammenziehbar.
- 3 Für $n \geq 3$ ist $\iota_\#$ ein Isomorphismus.

Beispiele: So präsentieren wir (1) die Fundamentalgruppe jedes Graphen, (2) jedes SKomplexes, insbesondere die Flächengruppen $G_g^\pm = \pi_1(F_g^\pm, *)$.

Anheften von Zellen

Satz L6P gilt ebenso für das simultane Anheften beliebig vieler Zellen. Wir sind mit diesem nützlichen Prinzip bereits vertraut aus unseren Berechnungen der Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$ jedes zshgden Simplicialkomplexes K gemäß Satz L6I. Zunächst wählen wir einen Spannbaum $T \subseteq K$ (I3J); dieser ist zusammenziehbar (J8F).

- 1 $n = 1$: Anheften jeder weiteren Kante liefert einen freien Erzeuger.
- 2 $n = 2$: Anheften jedes Dreiecks liefert eine Relation (evtl. redundant).
- 3 Anheften höherer Simplizes ändert die Fundamentalgruppe nicht.

😊 Diese zelluläre Sichtweise hat einen enormen praktischen Nutzen: Jeder vernünftige Raum X lässt sich als **Zellkomplex** darstellen, also durch sukzessives Anheften von Zellen $\mathbb{D}^0, \mathbb{D}^1, \mathbb{D}^2, \mathbb{D}^3, \dots$ aufbauen:

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n, \quad X_n = X_{n-1} \bigcup_{f_n} (I_n \times \mathbb{D}^n), \quad f_n : I_n \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$$

Hierbei ist I_n irgendeine (diskrete) Indexmenge und zählt die n -Zellen. Dieser induktive Aufbau ist eine effiziente Beschreibung des Raumes und führt direkt uns zur Präsentation der Fundamentalgruppe.

$$\begin{array}{ccccccc}
S^0 & \xrightarrow{+1\text{-Zellen}} & S^1 & \xrightarrow{+2\text{-Zellen}} & S^2 & \xrightarrow{+3\text{-Zellen}} & S^3 \xrightarrow{+4\text{-Zellen}} \dots \\
\downarrow S^0 & & \downarrow S^0 & & \downarrow S^0 & & \downarrow S^0 \\
\mathbb{RP}^0 & \xrightarrow{+1\text{-Zelle}} & \mathbb{RP}^1 & \xrightarrow{+2\text{-Zelle}} & \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{+3\text{-Zelle}} & \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{+4\text{-Zelle}} \dots \\
\\
S^1 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & S^3 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & S^5 & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & S^7 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \dots \\
\downarrow S^1 & & \downarrow S^1 & & \downarrow S^1 & & \downarrow S^1 \\
\mathbb{CP}^0 & \xrightarrow{+2\text{-Zelle}} & \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{+4\text{-Zelle}} & \mathbb{CP}^2 & \xrightarrow{+6\text{-Zelle}} & \mathbb{CP}^3 \xrightarrow{+8\text{-Zelle}} \dots
\end{array}$$

Satz L6T: Fundamentalgruppen der projektiven Räume

(R) Die Inklusionen $\mathbb{RP}^0 \hookrightarrow \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{RP}^3 \hookrightarrow \dots$ induzieren

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1 \mathbb{RP}^0 & \xrightarrow{\iota_{\#}} & \pi_1 \mathbb{RP}^1 & \xrightarrow{\iota_{\#}} & \pi_1 \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow[\cong]{\iota_{\#}} & \pi_1 \mathbb{RP}^3 \xrightarrow[\cong]{\iota_{\#}} \dots \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\cong} \dots
\end{array}$$

😊 Die Schleife, die einmal um $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ läuft, erzeugt $\pi_1 \mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{Z}$ und überlebt in $\pi_1 \mathbb{RP}^n$ mit $n \geq 2$ als das Element der Ordnung 2.

(C) Im komplexen Fall ist $\pi_1 \mathbb{CP}^n$ trivial für alle $n \in \mathbb{N}$.

Anwendung: projektive Räume

😊 Wir nutzen dankend die Zellstruktur von $\mathbb{RP}^n$ und $\mathbb{CP}^n$, siehe K2j. Dieser induktive Aufbau beschert uns sofort die Fundamentalgruppe!

😊 Die kleinsten Beispiele $\mathbb{RP}^0 = \{*\}$ und $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ und $\mathbb{RP}^2$ sind speziell, daher haben wir diese separat durchgerechnet und ausführlich diskutiert. Ab da stabilisiert sich die Fundamentalgruppe, das heißt, für alle $n \geq 2$ stiftet die Inklusion den Isomorphismus $\pi_1(\text{inc}) : \pi_1(\mathbb{RP}^n) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{RP}^{n+1})$.

😊 Auch komplex sind die kleinsten Beispiele $\mathbb{CP}^0 = \{*\}$ und $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ speziell und erstaunlich und lohnen unsere detaillierte Untersuchung. Die Fundamentalgruppe ist und bleibt hier jedoch von Anfang an trivial! (Der komplexe Fall ist wie so oft leichter als der reelle.)

Übung: Beweisen Sie folgende Konstruktion durch Ankleben von Zellen: Zu jeder beliebigen Gruppe G existiert ein Simplicialkomplex (K, x_0) mit einem Isomorphismus $h : \pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\cong} G$. Ist G frei, so genügt ein Graph ($\dim K \leq 1$), allgemein genügt $\dim K \leq 2$. Genau dann kann K endlich gewählt werden, also $|K|$ kompakt, wenn G endlich präsentierbar ist.

O Spannbaum

Ein Lied zur Berechnung der Fundamentalgruppe eines Zellkomplexes

Moterel Göobermann

Traditionell



♩ = 85

0. O Spann-baum, o Spann-baum, Wir brau-chen Dei-ne Blät-ter. Wir

5 bau-en uns' - ren Raum da-raus und rech-nen sei - ne Grup - pe aus. O

9 Spann - baum, o Spann - baum, Wir brau-chen Dei - ne Blät - ter.

Eine schöne Zusammenarbeit von Moritz Gösling und Walter Huober auf Anregung von Michael Eisermann in der Algebraischen Topologie im Wintersemester 2017/2018. Uraufgeführt im Ökumenischen Zentrum bei einem unvergesslichen Musikabend des Fachbereichs Mathematik.

O Spannbaum - Präsentation der Fundamentalgruppe

0. O Spannbaum, o Spannbaum,
wir brauchen Deine Blätter.
Wir bauen uns'ren Raum daraus,
und rechnen seine Gruppe aus.
O Spannbaum, o Spannbaum,
wir brauchen Deine Blätter.

1. O Spannbaum, o Spannbaum,
trivial ist Deine Gruppe!
Wir spannen nun Erzeuger ein,
das wird des Graphen Gruppe sein.
O Spannbaum, o Spannbaum,
trivial ist Deine Gruppe.

2. O Einskomplex, o Einskomplex,
wie frei ist Deine Gruppe!
Wir kleben nun k -Zellen an,
das ändert uns're Gruppe dann.
O Einskomplex, o Einskomplex,
wie frei ist Deine Gruppe.

3. O Zweikomplex, o Zweikomplex,
was machen denn 2-Zellen?
Zusammenziehbar, wie sie sind,
sind Relationen dann ihr Kind.
O Zweikomplex, o Zweikomplex,
was machen denn 2-Zellen?

4. O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir kennen Deine Gruppe.
Für k gleich oder größer drei
ändert sich nichts, es bleibt dabei
O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir kennen Deine Gruppe.

5. O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir fanden Deine Gruppe.
Pi-Eins-Gruppen, das ist bekannt,
sind topologisch invariant.
O Zellkomplex, o Zellkomplex,
wir fanden Deine Gruppe.

O Spannbaum vertont einen mathematischen Satz und steht damit in einer langen und ruhmreichen Tradition von Liedern über Mathematik, egal ob als Würdigung oder Merkhilfe oder aus überquellender Freude über eine beachtliche intellektuelle Leistung in vollendeter Form.

Choral (der Hauptsatz)

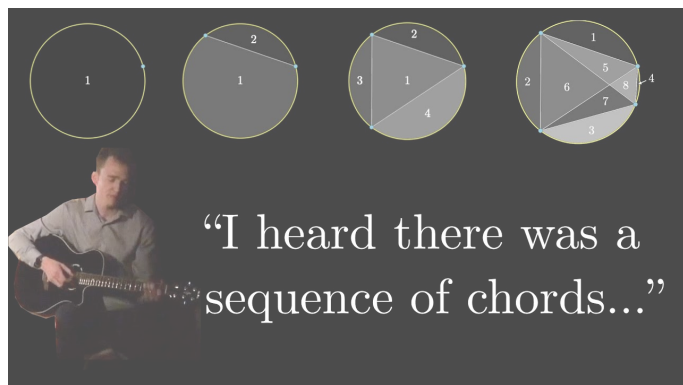
10 Sopran, Alt, Tenor, Bass

1. Es sei f ste-ti - ge Funk-tion auf ei-nem In-ter - vall. Dann e-xis-tiert von a bis x da - zu das In-te -

Berühmt ist hierzu im deutschsprachigen Raum die „Hauptsatzkantate – Vertonung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nebst Beweis, Anwendungen und historischen Bemerkungen für vierstimmigen Chor, Mezzosopran-, Tenor-Solo und Klavier“, siehe youtu.be/4n6aB4aasyg. Geschrieben und vertont wurde sie vom Mathematiker Friedrich Wille (1935–1992), erschienen 1984 in seinem Buch *Humor in der Mathematik*.

Mathematik in musikalischer Form

L652
Exkurs



Grant Sanderson alias 3blue1brown singt *How they fool ya (live)*, youtu.be/NOCsdhzo6Jg und warnt eindrücklich vor voreiligen Schlüssen.

Die Unendlichkeit der Primzahlen und das Problem der Primzwillinge besingt hinreißend *Ain't No Twin Primes (live)*, youtu.be/djzKCZHeVjY.

Ansprechend finde ich auch *Hilberts Hotel* vertont als *Hotel Infinity* von Lawrence Mark Lesser, siehe B227, larrylesser.com/greatest-lesser-hits.

Er lehrt als Statistiker und verbindet Weisheit und Wortwitz in Liedform, siehe youtu.be/XGw6AtRWMA4&t=128s. Jetzt möchte ich mehr Statistik lernen.

Anwendung: orthogonale Gruppen

Dank G5G gilt $GL_n^+ \mathbb{R} \simeq SO_n \mathbb{R}$, somit $\pi_1 GL_n^+ \mathbb{R} \cong \pi_1 SO_n \mathbb{R}$, dank F1Q $SO_1 \mathbb{R} = \{1\}$, $SO_2 \mathbb{R} \cong S^1$, $SO_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ und $SU_1 \mathbb{C} = \{1\}$, $SU_2 \mathbb{C} \cong S^3$.

Satz L6u: Fundamentalgruppen der orthogonalen Gruppen

($\mathbb{R}$) Die Inklusionen $SO_1 \hookrightarrow SO_2 \hookrightarrow SO_3 \hookrightarrow SO_4 \hookrightarrow \dots$ induzieren

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1 SO_1 & \xrightarrow{\iota_{\#}} & \pi_1 SO_2 & \xrightarrow{\iota_{\#}} & \pi_1 SO_3 & \xrightarrow[\iota_{\#}]{\cong} & \pi_1 SO_4 \xrightarrow[\iota_{\#}]{\cong} \dots \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \{1\} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\cong} \dots \end{array}$$

😊 Die Schleife, die eine volle Drehung realisiert, erzeugt $\pi_1 SO_2 \cong \mathbb{Z}$ und überlebt in $\pi_1 SO_n$ mit $n \geq 3$ als das Element der Ordnung 2.

($\mathbb{C}$) Im komplexen Fall ist $\pi_1 SU_n$ trivial für alle $n \in \mathbb{N}$.

Den Anfang $SO_2 \hookrightarrow SO_3$ haben wir hier *ad hoc* behandelt. Die gesamte Folge erhält man in der Algebraischen Topologie aus der langen exakten Homotopie-Sequenz für Faserbündel. Diese Technik steht uns leider noch nicht zur Verfügung, ich bleibe diesen Teil daher vorerst schuldig.

Kölner Dom von Unbekannten um 360 Grad gedreht



Köln (dpo) — Unbekannte haben vergangene Nacht den Kölner Dom aus seiner Verankerung gelöst, leicht angehoben und um exakt 360 Grad gedreht.

Die Tat war offensichtlich von langer Hand geplant, wurde sehr professionell ausgeführt und verlief nahezu spurenlos. [...] Zur Stunde arbeitet ein Gutachterteam aus Statikern und Architekten fieberhaft daran, herauszufinden, in welche Richtung der Dom überhaupt gedreht wurde.

Wir tanzen $\pi_1 \text{SO}_2$: Drehungen in der Ebene!

Wenn Sie eine Figur in der Ebene $\mathbb{R}^2$ um 360° drehen, dann liegt sie genau wie zuvor. Nicht trivial jedoch ist der durchlaufene Weg

$$\alpha_2 : \mathbb{R} \supseteq [0, 1] \rightarrow \text{SO}_2 : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{bmatrix}.$$

Wegen $\text{SO}_2 \cong \mathbb{S}^1$ wird $\pi_1 \text{SO}_2$ frei von $[\alpha_2]$ erzeugt:

$$\pi_1(\text{SO}_2, 1) = \langle [\alpha_2] \mid - \rangle \simeq \mathbb{Z} : n \mapsto [\alpha_2]^n = [t \mapsto \alpha_2(nt)]$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_2(t) \in \text{SO}_2$ die Rotation der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Winkel $2\pi t$. Somit ist α_2 eine Schleife in $(\text{SO}_2, 1)$. Jedes Element in $\pi_1 \text{SO}_2$ ist eine n -fache Drehung und genau dann trivial, wenn $n = 0$ gilt.

😊 Wie in jeder topologischen Gruppe $(G, \mathcal{T}, \cdot, 1)$ gilt auch hier $[\alpha]^k = [\alpha^k]$, denn $\alpha * \beta \sim \alpha \cdot \beta \sim \beta * \alpha$. (Übung zur Wiederholung, siehe L449!)

😊 Sie können das visualisieren, ja sogar körperlich spürbar erfahren, wenn Sie sich in ein Tuch oder Seil einwickeln und wieder auswickeln! Das ist eine Besonderheit der Ebene. Im Raum geschieht ein Wunder...

Wir tanzen $\pi_1 \text{SO}_3$: Drehungen im Raum!

Wenn Sie einen Körper im Raum $\mathbb{R}^3$ um 360° drehen, dann liegt er wieder genau wie zuvor. Wer bei der Bewegung nicht zugeschaut hat, bemerkt überhaupt keinen Unterschied. Doch die Fundamentalgruppe merkt sich diese Drehung! Nicht-trivial ist auch hier der durchlaufene Weg

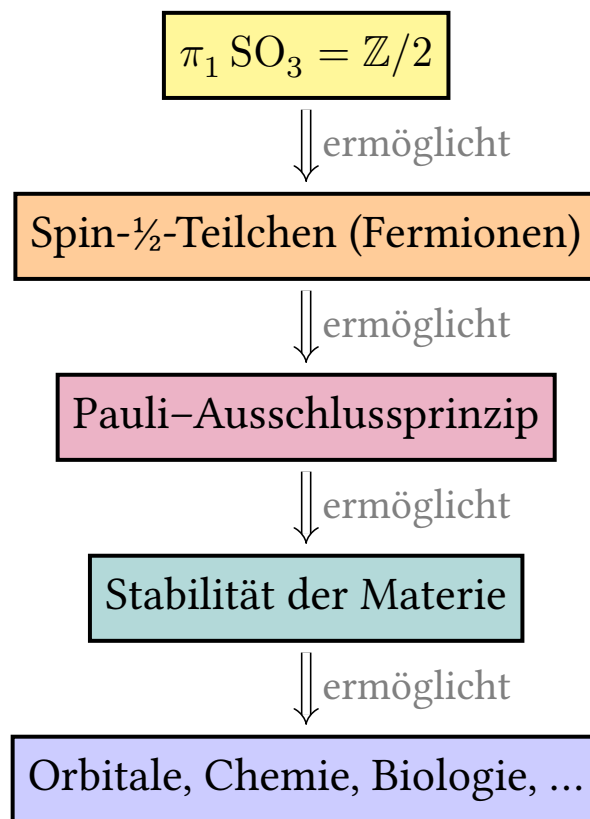
$$\alpha_3 : \mathbb{R} \supseteq [0, 1] \rightarrow \text{SO}_3 : t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wegen $\text{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$ wird $\pi_1 \text{SO}_3$ von $[\alpha_3]$ erzeugt, wobei $[\alpha_3]^2 = [1]$:

$$\pi_1(\text{SO}_3, 1) = \langle [\alpha_3] \mid [\alpha_3]^2 = [1] \rangle \simeq \mathbb{Z}/2 : n + 2\mathbb{Z} \mapsto [\alpha_3]^n = [t \mapsto \alpha_3(nt)]$$

😊 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_3(t)$ die Rotation des Raumes $\mathbb{R}^3$ mit Winkel $2\pi t$ um die z -Achse. Somit ist α_3 eine Schleife in $(\text{SO}_3, 1)$. Sie repräsentiert das nicht-triviale Element in $\pi_1 \text{SO}_3, 1 \cong \mathbb{Z}/2$. Der Weg α_3 ist auch hier nicht-trivial, also $[\alpha_3] \neq [1]$, doch die zweifache Drehung ist trivial, $[\alpha_3]^2 = [1]$. Wie kann man das verstehen, visualisieren oder gar spüren?

😊 Mathematik erklärt, was die Welt im Innersten zusammenhält!



Warum sollte uns $\pi_1 SO_3$ interessieren? Hat die Mathematik reale Bedeutung? Hat die Topologie spürbare Konsequenzen? Oh, ja!

Wir leben in drei Raumdimensionen, zumindest scheint dies ein gutes Modell, und die Tatsache $\pi_1 SO_3 \cong \mathbb{Z}/2$ hat physikalische Bedeutung: Jedes Elementarteilchen steht mit dem umgebenden Universum in Wechselwirkung. (In der folgenden Turnübung spielt die Tasse das Teilchen, Sie das Universum und Ihr Arm die Wechselwirkung.)

Nun eröffnet $\pi_1 SO_3 \cong \mathbb{Z}/2$ die Möglichkeit, dass einmalige Drehung nicht trivial ist, aber zweimalige Drehung schon. Je nachdem, ob das Teilchen auf diesen Unterschied reagiert oder nicht, spricht die Physik von halbzahligem oder ganzzahligem Spin, und die Teilchen heißen je nach ihrem Verhalten Fermionen oder Bosonen.

😊 Das ist zunächst nur eine theoretische Möglichkeit, doch die Natur will es tatsächlich genau so: Das Elektron hat diese Spin- $\frac{1}{2}$ -Eigenschaft, es spürt und merkt sich, wenn es um 360° gedreht wird.

Ebenso zu den Fermionen gehören Protonen und Neutronen, aus denen Atomkerne aufgebaut sind, und alle massebehafteten Elementarteilchen. Zu den Bosonen gehören zum Beispiel die Photonen, die für das Licht und elektromagnetische Felder verantwortlich sind.

😊 Der Spin hat in der Quantenmechanik weitreichende Konsequenzen:

Bei Vertauschung identischer Fermionen wechselt ihre Wellenfunktion Ψ das Vorzeichen; insbesondere können nicht beide im selben Zustand sein, denn sonst wäre $\Psi = -\Psi$, also $\Psi = 0$. Das sorgt unter anderem dafür, dass Elektronen im Atom verschiedene Energieniveaus besetzen müssen und trägt somit zur Stabilität der Materie bei.

Bei Vertauschung zweier Bosonen hingegen bleibt ihre Wellenfunktion Ψ unverändert. Im Gegensatz zu Fermionen können deshalb viele Bosonen im selben Zustand sein. Das nutzt man insbesondere beim Laser.

Theoretische Erkenntnisse werden bemerkenswert rasant technologisch genutzt und sind schon lange in unserem Alltag angekommen.

Der Physiker Paul Dirac (1902–1984) entdeckte das Phänomen des Spin *theoretisch*, als er 1928 die Schrödinger–Gleichung der Quantenmechanik relativistisch formulierte. Die resultierende Dirac–Gleichung ergibt sich dabei aus mathematischer Notwendigkeit. Sie impliziert unter anderem die Existenz von Anti-Materie. Dies war bis dato weder beobachtet noch vermutet worden, wurde aber im Anschluss an Diracs theoretische Erkenntnis tatsächlich *experimentell* bestätigt.

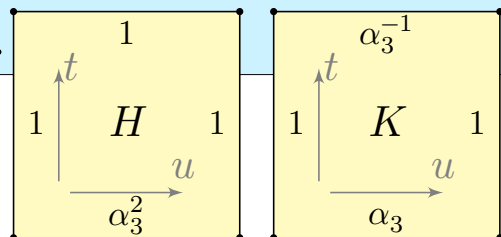
Diese Geschichte illustriert, wie sich Theorie und Praxis gegenseitig befruchten, und belegt insbesondere, dass manchmal die Theorie der Praxis vorausseilt: Mit Mathematik sieht man mehr. Diracs Theorie ist einer der großen Triumphe der Physik! Er erhielt für diese Leistung 1933 den Nobel–Preis, zusammen mit Erwin Schrödinger (1887–1961).

😊 Nun will ich nicht den Eindruck erwecken, die Berechnung von $\pi_1 \text{SO}_3 = \mathbb{Z}/2$ wäre hier das Wichtigste. Vielmehr ist diese Eigenschaft des Raumes die topologische Grundlage, auf der sich die mathematische und physikalische Theorie der Dirac–Operatoren entfaltet.

Übung: (Folklore) Halten Sie eine gefüllte Tasse auf Ihrer Hand und drehen Sie diese behutsam vor sich um 360° um die vertikale Achse. Ihr Arm befindet sich nun in angespannter Haltung. Natürlich können Sie die Drehung genauso rückgängig machen und Ihren Arm so wieder entspannen. So verrückt es klingt, statt die Drehung rückgängig zu machen, können Sie auch *dieselbe* Drehung noch einmal durchführen, um Ihren Arm zu entspannen!

😊 Bei Lerntypen unterscheidet man auditive, visuelle, kommunikative, motorische, uvm. Wenn Sie motorisch lernen, sollten Sie das unbedingt selbst ausprobieren. Wenn Sie visuell lernen, dann lassen Sie es sich hier feierlich vorführen. Wenn Sie auditiv lernen, dann lassen Sie es sich mitreißend erklären. Wenn Sie kommunikativ lernen, dann erzählen Sie auf den nächsten Parties neidisch-staunenden Kommiliton:innen von Ihrer phantastisch guten Topologie-Vorlesung und Ihren vielen schönen Aha-Erlebnissen. Nicht nur reden, auch gleich machen: Führen Sie publikumswirksam Diracs Spin-Trick vor! Gern geschehen.

Dirac–Spin-Trick: Rodrigues zeigt $\alpha_3^2 \sim 1$.



L662

Aufgabe: Konstruieren Sie in SO_3 explizit Homotopien $H : \alpha_3^2 \sim 1$ und $K : \alpha_3 \sim \alpha_3^{-1}$.

Lösung: Die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um die Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ ist leicht explizit anzugeben dank der eleganten Rodrigues–Formel (K2p):

$$\rho(s, \theta) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto x + \sin(\theta) \cdot s \times x + (1 - \cos(\theta)) \cdot s \times (s \times x).$$

Wir erhalten die stetige Surjektion $\rho : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow \text{SO}_3 \subseteq \text{GL}_3 \mathbb{R}$.

Der Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2 : t \mapsto (0, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$ führt vom Nordpol $\gamma(0) = (0, 0, 1)$ zum Südpol $\gamma(1) = (0, 0, -1)$. Wir erhalten

$$K : [0, 1]^2 \rightarrow \text{SO}_3 : (t, u) \mapsto \rho(\gamma(t), 2\pi u).$$

Nach Konstruktion ist K stetig. Für alle $t, u \in [0, 1]$ finden wir:

$$K(t, 0) = \text{id}, \quad K(t, 1) = \text{id}, \quad K(0, u) = \alpha_3(u), \quad K(1, u) = \alpha_3(u)^{-1},$$

Daraus erhalten wir die gesuchte Homotopie $H : \alpha_3^2 \sim 1$ vermöge

$$H : [0, 1]^2 \rightarrow \text{SO}_3 : (t, u) \mapsto \rho(\gamma(t), 2\pi u) \cdot \rho(\gamma(0), 2\pi u).$$

Lässt sich der folgende Zopf z entwirren?



Lässt sich der „doppelt so komplizierte“ Zopf z^2 entwirren?

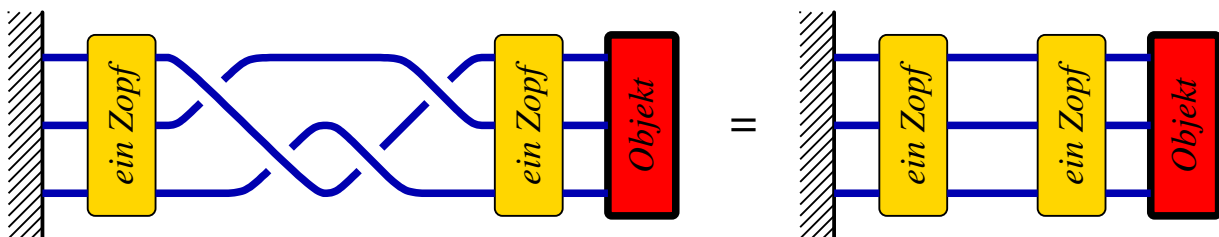


Hier wirken Drehungen ganz direkt, und so wird $\pi_1 SO_3$ leicht fasslich. Tatsächlich gilt $z \approx 1$, das beweist $\alpha_3 \approx 1$. Der Zopf ist unser Zeuge!

Auch dahinter steckt wunderschöne Mathematik! Emil Artin führte 1925 die Zopfgruppe B_n auf n Strängen ein und bewies die Präsentation

$$B_n \cong \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{ll} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i - j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{für } |i - j| \geq 2 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Auch Dirac-Zöpfe auf n Strängen bilden eine Gruppe B'_n . Dies ist Artins Zopfgruppe B_n mit der zusätzlichen Relation $s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_2 s_1 = 1$.



Die Abelschmachung $B_n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ bzw. $\alpha : B'_n \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2(n-1)$ mit $s_i^\pm \mapsto \pm 1$ zählt Kreuzungen mit Vorzeichen. Die Invariante $\alpha(z) \equiv 2 \neq 0$ zeigt $z \approx 1$. Das Hindernis verschwindet für $\alpha(z^2) \equiv 0$. Tatsächlich lässt sich der Zopf z^2 entwirren (Rodrigues). Probieren Sie es, es wirkt wie Magie!



