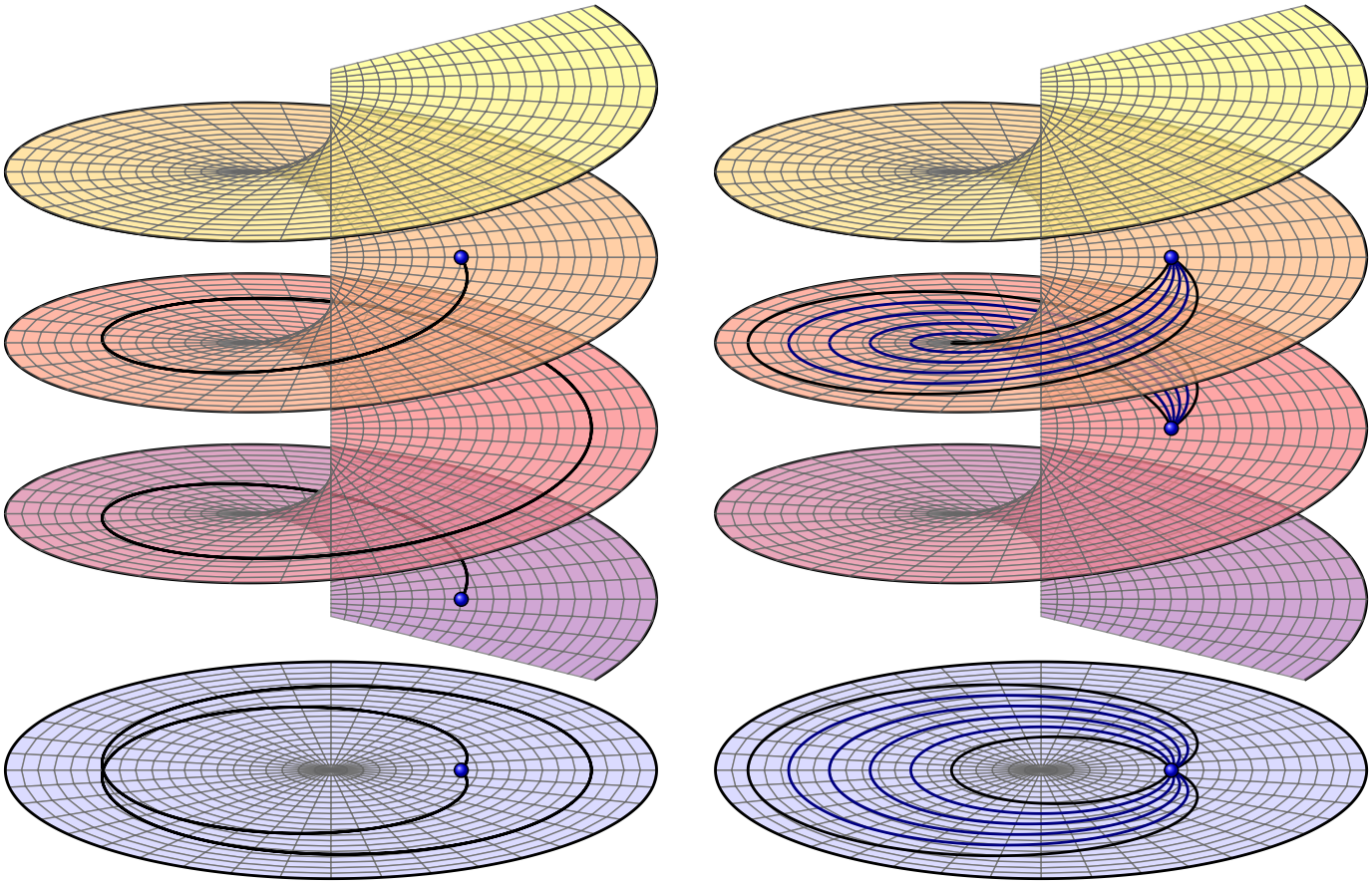
Kapitel M

Überlagerungen topologischer Räume

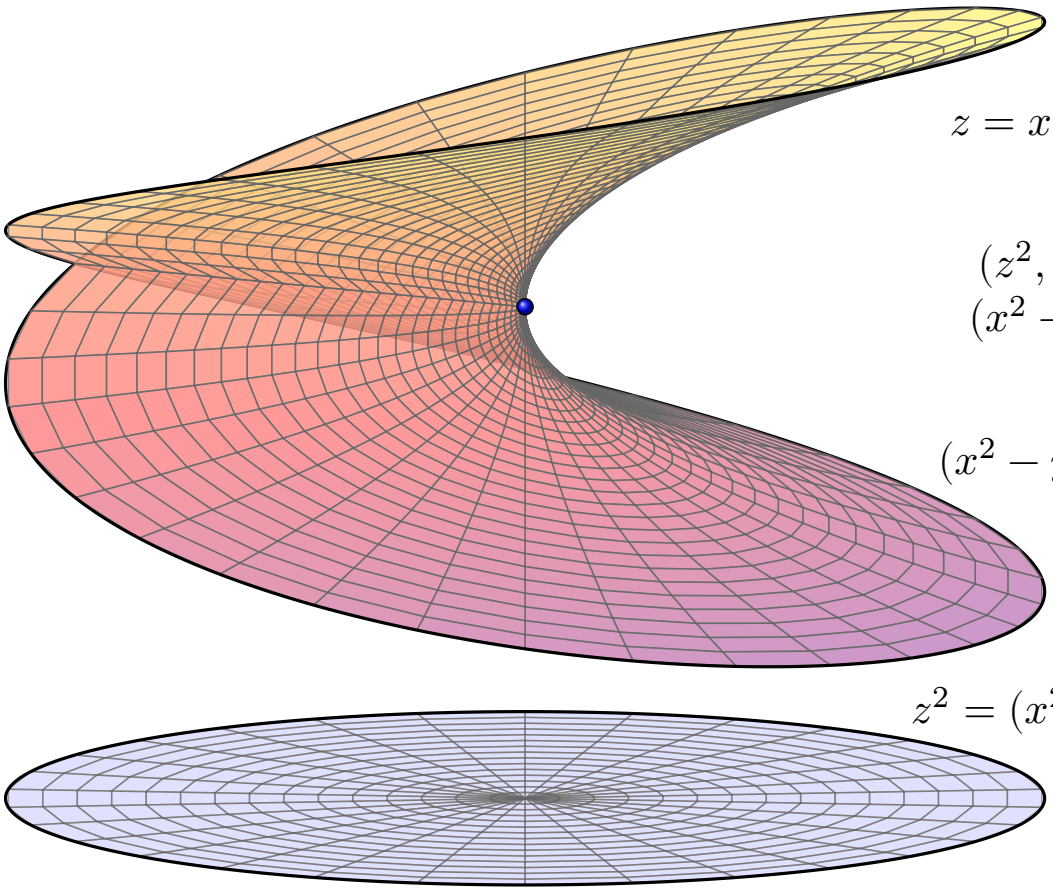
Non quia difficilia sunt non audemus,
sed quia non audemus difficilia sunt.
[Nicht weil es schwierig ist, wagen wir es nicht,
sondern weil wir es nicht wagen, ist es schwierig.]
Seneca, Moralische Briefe an Lucilius

Inhalt dieses Kapitels M

Was sind und was sollen Überlagerungen?



Was sind und was sollen Überlagerungen?



$$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{C}$$

$$\downarrow$$

$$(z^2, z) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$

$$(x^2 - y^2, 2xy, x, y)$$

$$\downarrow$$

$$(x^2 - y^2, 2xy, x) \in \mathbb{R}^3$$

$$\downarrow p$$

$$z^2 = (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{D}^2$$

Was sind und was sollen Überlagerungen?

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist eine besonders schöne Abbildung. Sie kennen und nutzen bereits typische Beispiele wie Polarkoordinaten

$$p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : (r, t) \mapsto (r \cos t, r \sin t).$$

Jede *Überlagerung* $p : \tilde{X} \to X$ sieht lokal aus wie ein Pfannkuchenstapel: Der Raum X wird überdeckt durch offene Mengen $U \subseteq X$, deren Urbild $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ disjunkte Vereinigung offener Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$ ist, die jeweils durch p homöomorph auf U abgebildet werden (M1A).

Überlagerungen begegnen uns früh in der mathematischen Ausbildung, spätestens bei der Einführung komplexer Zahlen $\mathbb{C}$, und ab da überall:

(1) Die komplexe Potenzfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \mapsto w^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist eine Überlagerung (verzweigt im Nullpunkt). Warum gibt es komplex (anders als reell!) keine stetige Wurzelfunktion „$\sqrt[n]{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$“?

(2) Die Lösung quadratischer Gleichungen $z^2 + pz + q = 0$ durch die (komplexe) Mitternachtsformel $\{z_1, z_2\} = \{-p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}\}$.

Was sind und was sollen Überlagerungen?

(3) Ganz allgemein polynomielle Gleichungen: Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ ist eine n–blättrige Überlagerung, verzweigt über den kritischen Werten von p (M1H).

(4) Ebene Polarkoordinaten: Die trigonometrische Parametrisierung der Kreislinie, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, ist eine Überlagerung. Warum ist die Polardarstellung $z = r \cdot (\cos t + \mathrm{i} \sin t)$ für $z \in \mathbb{C}^\times$ nicht eindeutig?

(5) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist eine Überlagerung. Warum gibt es (anders als im Reellen!) keinen stetigen komplexen Logarithmus „$\ln : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$“?

Diese Konstruktionen und Fragestellungen reichen zurück bis zu den Anfängen der komplexen Zahlen: Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ provoziert die Einführung von „$\sqrt{-1} = \pm\mathrm{i}$“ und führt zum Fundamentalsatz der Algebra (J1T). Diese überaus erfolgreichen Anwendungen sind bis heute ein guter Grund zur Nutzung komplexer Zahlen, in der Mathematik ebenso wie überall in Naturwissenschaften und im Ingenieurwesen.

Wozu nutzen wir Überlagerungen?

Allein dies würde eine ausführliche Behandlung von Überlagerungen rechtfertigen. Die allgemeine Betrachtung beschert uns zudem zahlreiche weitere Beispiele und nützliche Anwendungen, wie etwa Überlagerungen von Graphen, von Flächen und von Lie–Gruppen wie $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$.

Im vorangegangenen Kapitel L haben wir die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ konstruiert, berechnet und nutzen gelernt. Dieses Kapitel M untersucht das duale Konzept der Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Diese Dualität inkarniert ein extrem erfolgreiches Paradigma:

Gruppen wollen operieren!

Wir müssen einer Gruppe nur einen geeigneten Bereich zur Verfügung stellen, auf dem sie operieren kann, und schon entfaltet sie dort ihre Wirkung und enthüllt ihre Wesenszüge. Das wollen wir nutzen.

Dies gilt insbesondere für Fundamentalgruppen: Sie operieren auf Überlagerungen. Beide sind in einem präzisen Sinne dual zueinander. Dies ermöglicht Berechnungen und wirkungsvolle Anwendungen.

Galois–Überlagerungen

Zahlreiche und besonders schöne Überlagerungen entstehen nach folgendem Muster als Quotienten geeigneter Gruppenoperationen:

Satz M4G: kurze exakte Sequenz

Für jede freie diskontinuierliche Operation $G \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$ ist der Quotient q eine Überlagerung. Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so nennen wir dies eine *Galois–Überlagerung*, und erhalten die kurze exakte Sequenz (SES)

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G \longrightarrow 1.$$

Exaktheit bedeutet „Bild = Kern“. Hier heißt das links: $q_\sharp$ ist injektiv, rechts: h ist surjektiv, und zwischen beiden gilt $\mathrm{Im}(q_\sharp) = \mathrm{Ker}(h)$. Dies induziert den Isomorphismus $\bar{h} : \pi_1(X, x_0)/\mathrm{Im}(q_\sharp) \xrightarrow{\sim} G$.

Die Überlagerung heißt *universell*, wenn der überlagernde Raum $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ einfach zusammenhängend ist, also $\pi_0(\tilde{X}) = \{\tilde{X}\}$ und $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$. Der Satz beschert uns dann den Isomorphismus $h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G$.

Universelle Überlagerungen

topologischer Raum	universelle Überlagerung
X einfach zshgd, etwa $X = \mathbb{R}^n$	$\{1\} \curvearrowright X \xrightarrow{\sim} X$
einfach gelochte Ebene $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times$
Kreislinie $\mathbb{S}^1$, projektive Gerade $\mathbb{RP}^1$	$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$
Sphäre $\mathbb{S}^n$ der Dimension $n \geq 2$	$\{1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$
projektiver Raum $\mathbb{RP}^n$, $n \geq 2$	$\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$
orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$	$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$
orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$	$\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$
Linsenraum $L(p,q)$	$\mathbb{Z}/p \curvearrowright \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow L(p,q)$
Fläche $F_0^\pm$, also $\mathbb{S}^2$ oder $\mathbb{RP}^2$	$G_0^\pm \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow F_0^\pm$, sphärisch
Fläche $F_1^\pm$, Torus / Kleinsche Flasche	$G_1^\pm \curvearrowright \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow F_1^\pm$, euklidisch
Fläche $F_g^\pm$, Geschlecht $g \geq 2$	$G_g^\pm \curvearrowright \mathbb{H}^2 \twoheadrightarrow F_g^\pm$, hyperbolisch
Bouquet B von $\lvert S \rvert$ Kreislinien	$\langle S \mid - \rangle \curvearrowright \Gamma \twoheadrightarrow B$, Cayley
SKomplex K mit $\pi_1(K, x_0) = \langle S \mid R \rangle$	$\langle S \mid R \rangle \curvearrowright \tilde{K} \twoheadrightarrow K$

Hauptsatz: die Galois–Korrespondenz

Fundamentalgruppen und Überlagerungen sind faszinierende Objekte. Zwischen beiden gilt eine verblüffende Dualität: Zusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0) entsprechen Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Satz M5A: Galois–Korrespondenz

Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend.

(1) Jede Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ und somit eine charakteristische Untergruppe $\mathrm{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$.

(2) Zu jeder beliebigen Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$ existiert genau eine zusammenhängende Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie.

(3) Genau dann ist die Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ galoisch, wenn die charakteristische Untergruppe $\mathrm{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$ normal ist. In diesem Fall operiert die Quotientengruppe $G = \mathrm{Im}(p_\sharp) \backslash \pi_1(X, x_0)$ auf Y und ergibt die Galois–Überlagerung $G \curvearrowright (Y, y_0) \to (X, x_0)$.

Analogie zur Integration

Zum Thema „Dualität“ kennen Sie bereits viele Beispiele. Aus der Linearen Algebra kennen Sie die Dualiät zwischen den Zeilen eines linearen Gleichungssystems und den Spaltenvektoren einer Basis des Lösungsraums. Aus der Analysis wissen Sie, dass Integrieren und Differenzieren zueinander invers sind (bis auf additive Konstanten).

Die Bestimmung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ durch Auffinden einer universellen Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ ähnelt der Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ durch Auffinden einer Stammfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Hat man das Glück oder das Geschick, eine Stammfunktion F explizit zu beschaffen, so ist der Nachweis $F' = f$ und die weitere Rechnung leicht.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung garantiert, dass es zu jeder stetigen Funktion f solch eine Stammfunktion F gibt. Konkrete Berechnungen können aber durchaus schwierig sein, wie jede:r weiß, die sich daran versucht hat. Schlimmer, zu Funktionen wie $f(x) = \exp(-x^2)$ oder $f(x) = \sin(x)/x$ lassen sich Stammfunktionen nachweislich nicht durch die üblichen Funktionen „in geschlossener Form“ ausdrücken.

Analogie zur Integration

Differenzieren ist Handwerk. Integrieren ist Kunst.

Dualität nutzen wir besonders gerne, je nach vorliegender Fragestellung, wenn eine der beiden Seiten einfacher zu berechnen ist als die andere. So können wir uns von zwei Wegen zum Ziel den leichteren aussuchen!

Mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ verhält es sich ähnlich: Haben wir eine universelle Überlagerung $G \curvearrowright \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ konkret vorliegen, so können wir hieraus die Gruppe $\pi_1(X, x_0) \cong G$ direkt ablesen. Die Schwierigkeit besteht nicht in der abstrakten Existenzaussage, sondern in der expliziten Konstruktion, möglichst konkret, informativ und einfach.

Der Hauptsatz der Überlagerungstheorie garantiert insbesondere, dass es zu jedem (hinreichend zusammenhängenden) Raum X eine universelle Überlagerung gibt. Aber auch hier kann die konkrete Bestimmung und die Untersuchung dieser Überlagerung beliebig schwierig sein. Manche Gruppen führen unmittelbar auf unlösbare algorithmische Probleme wie etwa das Wortproblem oder das Isomorphieproblem (§L3v).

Analogie zur Galois–Theorie

In vielen günstigen Fällen lassen sich diese Schwierigkeiten überwinden, wie die oben genannten Beispiele illustrieren. Die Überlagerungstheorie stiftet dann eine nützliche Übersetzung zwischen topologischen und algebraischen Daten. Sie ist eine grundlegende Technik der Topologie und ein willkommenes Hilfsmittel in Analysis, Geometrie und Algebra.

Es gibt eine bemerkenswert enge Analogie zwischen der topologischen Theorie der Überlagerungen $Y \twoheadrightarrow X$ über dem Basisraum X und der klassischen Galois–Theorie algebraischer Erweiterungen $E \geq K$ über dem Grundkörper K: Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(E|K)$ bzw. $\mathrm{Aut}(Y|X)$ erfüllt eine Galois–Korrespondenz von Untergruppen einerseits und Erweiterungen bzw. Überlagerungen andererseits.

📖 Tamás Szamuely: *Galois groups and fundamental groups.* CUP 2009
Adrien & Régine Douady: *Algèbre. Théories galoisiennes.* Dunod 1979

Anwendungen in Analysis und Geometrie

Überlagerungen treten auch in der Analysis natürlich auf, besonders in der Komplexen Analysis: Jede (nicht-konstante) holomorphe Funktion ist eine (verzweigte) Überlagerung. Bernhard Riemann hatte die geniale Idee, Funktionen von der Enge ihrer ebenen Definitionsgebiete zu befreien und auf Flächen auszudehnen, die berühmten *Riemannschen Flächen.*

So verbindet sich die Komplexe Analysis auf schönste und tiefgründige Weise mit Topologie, Differentialgeometrie und Algebraischer Geometrie! Nun will ich nicht behaupten, die Topologie wäre hier der zentrale Punkt, sie ist eher Grundlage und Wegbereiterin für noch reichere Strukturen. Überlagerungen und Gruppenoperationen sind der Ausgangspunkt und willkommene Techniken, die sich nahtlos in das Gesamtkunstwerk fügen.

📖 Klaus Lamotke: *Riemannsche Flächen.* Springer 2009
Otto Forster: *Lectures on Riemann surfaces.* Springer 1991

Anwendungen in Geometrie und Physik

Eine Lie–Gruppe G lässt sich lokal durch ihre Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ beschreiben und untersuchen. Überlagerungen bieten eine radikale Vereinfachung: Wir können zur universellen Überlagerung $p : \tilde{G} \twoheadrightarrow G$ übergehen. Dann ist auch $\tilde{G}$ eine Lie–Gruppe, und p ist ein Homomorphismus. Für viele Zwecke konzentriert man sich daher zunächst auf einfach zusammenhängende Lie–Gruppen. Für die Drehgruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ zum Beispiel finden wir die universelle Überlagerung $\mathrm{SU}_2\,\mathbb{C} \cong \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H}$.

Auf dem Wege über Lie–Gruppen finden Überlagerungen auch Eingang in die Physik. Ebenso über Mannigfaltigkeiten in der Relativitätstheorie; wir diskutieren kurz die Orientierungsüberlagerung in Satz M4P.

📖 John Stillwell: *Naive Lie theory.* Undergraduate Texts, Springer 2008
Brian C. Hall: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.* Springer 2015
Wolfgang Kühnel: *Matrizen und Lie–Gruppen.* Vieweg-Teubner 2011

Anwendungen in der Gruppentheorie

Der Satz von Nielsen–Schreier (M5D) besagt: In jeder freien Gruppe ist jede Untergruppe frei. Der Beweis gelingt leicht mit Überlagerungen!

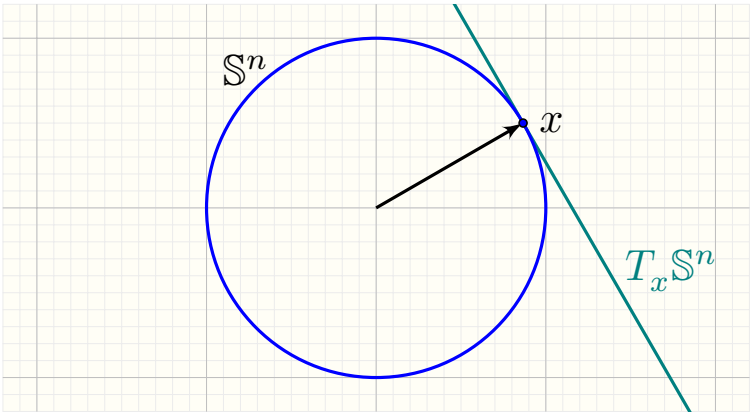
Für manche Räume B ist in der universellen Überlagerung $G \curvearrowright E \twoheadrightarrow B$ der Raum E nicht nur einfach zshgd, sondern sogar zusammenziehbar, siehe obige Beispieltabelle. Das ist eine besonders wertvolle Information. Wir nennen den Basisraum $B := K(G,1)$ dann *klassifizierenden Raum*; er codiert geometrisch alle Eigenschaften unserer Gruppe!

Jede Gruppe G erlaubt einen klassifizierenden Raum, sogar simplizial oder zellulär, und dieser ist eindeutig bis auf Homotopie-Äquivalenz. Damit verbinden wir kombinatorische mit geometrischen Techniken und nutzen topologische Werkzeuge zur Untersuchung von Gruppen! Das hat sich als überaus effizient und erfolgreich erwiesen.

📖 Kenneth S. Brown: *Cohomology of groups.* GTM 87, Springer 1994

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$

M001



Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ ist der **Tangentialraum** an $\mathbb{S}^n$ gegeben durch

$$T_x\mathbb{S}^n = \{\, v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0 \,\}.$$

Diese fassen wir zum **Tangentialbündel** zusammen: Der **Totalraum** ist

$$T\mathbb{S}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{S}^n} \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n = \{\, (x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0 \,\}.$$

Die **Bündelprojektion** $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x, v) \mapsto x$ ist stetig. Über jedem **Punkt** $x \in \mathbb{S}^n$ sitzt die **Faser** $p^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$. Ein **Vektorfeld auf** $\mathbb{S}^n$ ist ein Schnitt s von p, also $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n : x \mapsto (x, v(x))$ stetig.

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$

M002
Erläuterung

🙂 Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ ist $T_x\mathbb{S}^n = \{\, v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0 \,\} \leq \mathbb{R}^{n+1}$ ein $\mathbb{R}$–Untervektorraum der Dimension n. Anschaulich stellen wir uns jeden Tangentialvektor $v \in T_x\mathbb{S}^n$ in seinem Fußpunkt x angeheftet vor. So wird jede Faser $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ zu einem $\mathbb{R}$–Vektorraum dank der Addition $(x, u) + (x, v) = (x, u + v)$ und Skalierung $(x, v)\lambda = (x, v\lambda)$.

⚠ Es hat hier gar keinen Sinn, Tangentialvektoren über verschiedenen Fußpunkten $x \neq \tilde{x}$ addieren zu wollen: Die Fasern $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ und $F_{\tilde{x}} = \{\tilde{x}\} \times T_{\tilde{x}}\mathbb{S}^n$ sind disjunkt und daher streng getrennt zu behandeln! Dennoch wollen wir sie zu einem Gesamtobjekt zusammenfassen, also „bündeln“. Genau dies leistet das **Tangentialbündel** $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.

🙂 Das ist Lineare Algebra, hier als **Familie** linearer Gleichungen und Lösungsräume, und zwar stetig parametrisiert durch den **Basisraum** $\mathbb{S}^n$. Der **Totalraum** $T\mathbb{S}^n$ ist die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume. Die Fasern $(T_x\mathbb{S}^n)_{x \in \mathbb{S}^n}$ werden dabei gebündelt und stetig verklebt: Der Menge $T\mathbb{S}^n$ geben wir die Teilraumtopologie im Produkt $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$

⚠ Der Totalraum $T\mathbb{S}^n$ ist kein Vektorraum: Für sich allein betrachtet ist jede Faser $p^{-1}(x) = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ ein Vektorraum, aber Tangentialvektoren über verschiedenen Fußpunkten $x \neq \tilde{x}$ können nicht addiert werden. Das ist weder algebraisch möglich noch physikalisch sinnvoll.

☺ Dank der präzisen Sprech- und Schreibweise besteht nun keinerlei Verwechslungsgefahr zwischen dem Tangential*raum* $T_x\mathbb{S}^n$ (dieser ist ein Vektorraum, vermöge $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ angeheftet am Fußpunkt $x \in \mathbb{S}^n$) und dem Tangential*bündel* $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ (dieses besteht aus dem topologischen Totalraum $T\mathbb{S}^n$ mit der Bündelprojektion p).

☺ Nach Konstruktion ist $T\mathbb{S}^n$ einerseits ein topologischer Raum und zugleich die disjunkte Vereinigung der Vektorräume $T_x\mathbb{S}^n$ über $x \in \mathbb{S}^n$. Wir stellen uns dies als eine „kontinuierliche Familie“ von Vektorräumen $F_x = \{x\} \times T_x\mathbb{S}^n$ vor, „stetig parametrisiert“ durch den Fußpunkt $x \in \mathbb{S}^n$, und „stetig verklebt“ durch die Topologie des Totalraums $T\mathbb{S}^n$.
Diese Idee des Bündels $(F_x)_{x\in\mathbb{S}^n}$ wird durch p präzisiert.

Das Tangentialbündel der Sphäre $\mathbb{S}^n$

Tangentialvektoren sind ein grundlegendes Konzept in der Analysis, zunächst in der Differentialrechnung, dann in Geometrie und Physik. Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das Tangentialbündel $TU = U \times \mathbb{R}^n$ trivial, daher ist hier anfangs noch nichts Besonderes zu erkennen.

Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist das erste und zentrale Beispiel einer wunderbaren Theorie. In der Differentialgeometrie konstruiert man zu jeder glatten Mannigfaltigkeit M das Tangentialbündel $p : TM \to M$. Hieraus ergeben sich weitere Bündel, etwa das Kotangentialbündel T^*M.

Auch aus topologischer Sicht ist das höchst interessant, etwa beim Satz vom Igel oder allgemein zur Parallelisierbarkeit. Ganz allgemein sind Bündel allgegenwärtig und werden vielfach genutzt. Daher will ich dieses Konzept erläutern, bevor wir dann speziell Überlagerungen untersuchen.

📖 Dale Husemoller: *Fibre Bundles*. Springer 1966, 1994.
Norman Steenrod: *The Topology of Fibre Bundles*. PUP 1951, 1999.

Was ist ein Bündel?

Ein **Bündel** (E, p, B) ist eine stetige Surjektion $p : E \to B$. Wir nennen E den **Totalraum**, B den **Basisraum** und $p : E \to B$ die **Bündelprojektion**. Zu jedem $x \in B$ ist $F_x := p^{-1}(x) \subseteq E$ die **Faser** über dem Basispunkt x.

Die Bündel über dem Basisraum B bilden die Kategorie $\mathtt{Bun}_B := \mathtt{Top}^{\downarrow}_{B}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"] & Z \arrow[dl, "r"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

(a) Objekte der Kategorie $\mathtt{Bun}_B$ sind die Bündel $p : X \to B$.

(b) Ein Morphismus $f : p \to q$ von $p : X \to B$ nach $q : Y \to B$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit der Eigenschaft $p = q \circ f$, d.h. f kommutiert mit den Bündelprojektionen, respektiert also die Fasern: f schickt $p^{-1}(x)$ nach $q^{-1}(x)$ über jedem Basispunkt $x \in B$.

(c) Die Verknüpfung in $\mathtt{Bun}_B$ ist die Verknüpfung in $\mathtt{Top}$.

Was ist ein Bündel?

Ein „Bündel“ $p : E \to B$ ist also zunächst also ein großspuriges Wort für stetige Surjektion. Ist das nur ein grandioser Etikettenschwindel?

Nun ja, tatsächlich recyclen wir dankbar die Begriffe der Topologie. Die Sichtweise ist jedoch umgekehrt, nicht vorrangig in Richtung $E \to B$ der Projektion, sondern vom Fußpunkt $x \in B$ zur Faser $F_x = p^{-1}(x) \subseteq E$. Genau diesen besonderen Blickwinkel betont die Wortwahl „Bündel“.

Die grundlegende Definition ist verblüffend einfach und elegant. Die Sichtweise als „Räume über B“ codiert die grundlegende Struktur, diese können und werden wir im Folgenden erweitern und ausbauen. Die Sprache der Kategorien ist wie immer erfreulich und hilfreich.

Manche Autor:innen nennen kurz E ein Bündel über B und lassen die Projektion $p : E \to B$ weg, wenn sie aus dem Zusammenhang hervorgeht. Das mag intuitiv erscheinen, verschweigt aber die Bündelprojektion! Dieser Missbrauch der Notation ist irreführend, denn p bestimmt die Räume E und B, nicht umgekehrt. Ich versuche ihn zu vermeiden.

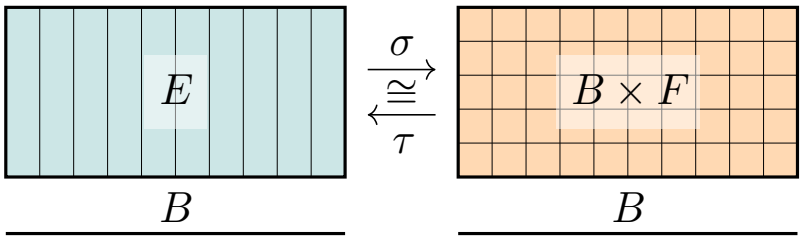
Was ist ein triviales Bündel?

Beispiel: Zur Basis B und Faser F haben wir das **Produktbündel**

$$q : B \times F \to B : (x, u) \mapsto x.$$

Eine **Trivialisierung** von p ist ein Bündelisomorphismus $(\sigma, \tau) : p \cong q$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, shift left, "\sigma"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[ll, shift left, "\tau"] \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$



Wir nennen das Bündel $p : E \to B$ dann **trivialisierbar** oder kurz **trivial** mit Faser F. Anschaulich: Bis auf Homöomorphie sieht p genauso aus wie das Produktbündel $q : B \times F \to B : (x, u) \mapsto x$. Das Bündel p hat zunächst nur eine „horizontale“ Koordinate $x \in B$. Die Trivialisierung $(\sigma, \tau) : p \cong q$ stiftet zudem eine globale „vertikale“ Koordinate $u \in F$, wie gezeigt.

Was ist ein triviales Bündel?

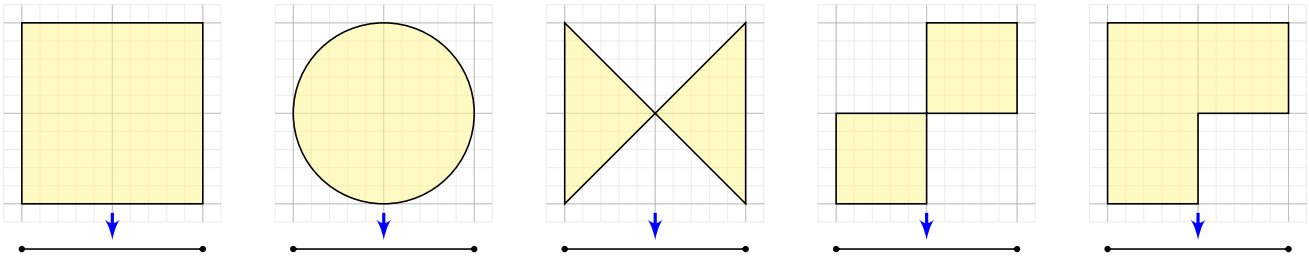
Genauer sagen wir, p ist **bündelisomorph** zum Produktbündel mit Faser F. Die hierzu geforderte **Bündeltrivialiserung** $(\sigma, \tau) : E \cong B \times F$ ist ein Homöomorphismus, der die beiden Projektionen p und q respektiert, also $q \circ \sigma = p$ erfüllt und (äquivalent dazu) $p \circ \tau = q$.

Die Homöomorphismen σ und τ sind zueinander invers. Manchmal ist die symmetrische Formulierung (σ, τ) bequem. Andermal brechen wir die Symmetrie und geben nur einen an, die **Bündelkarte** $\sigma : E \xrightarrow{\sim} B \times F$ oder die **Bündelkoordinaten** $\tau : B \times F \xrightarrow{\sim} E$, siehe folgende Beispiele.

Das Produktbündel q ist trivial, dank der trivialen Trivialisierung $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$. Die Frage, ob ein gegebenes Bündel $p : E \to B$ trivial ist oder nicht, ist oft schwierig und hochgradig nicht-trivial, siehe $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$. Das Bündel mag trivial sein, die Trivialisierungen sind es oft nicht!

Selbst das Produktbündel $q : B \times F \to B : (x, u) \mapsto x$ hat i.A. unendlich viele Trivialisierungen. Dies sind die Automorphismen $\tau : B \times F \xrightarrow{\sim} B \times F$ über B, das heißt $\tau(x, u) = (x, h_x(u))$ mit $h : B \to \mathrm{Homeo}(F) : x \mapsto h_x$. Die Sprechweise als Bündel ist sowohl intuitiv als auch präzise.

Welche Bündel sind trivial, welche nicht?



Die Graphik zeigt Bündel $p : E \to B$ über dem Intervall $B = [-1, 1]$, wobei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Teilraum ist und $p(x, y) = x$ die Bündelprojektion.

Aufgabe: Welche dieser Abbildungen $p : E \to B$ ist ein triviales Bündel?
(1) $E = [-1, 1]^2$ (2) $E = \mathbb{D}^2$ (3) $E = \{\, (x, y) \in [-1, 1]^2 : |y| \leq |x| \,\}$
(4) $E = [-1, 0]^2 \cup [0, 1]^2$ (5) $E = ([-1, 0] \times [-1, 1]) \cup [0, 1]^2$

☺ Bündel sind wunderbar anschaulich. Idee und Definition sind dabei extrem allgemein und flexibel, daher treten Bündel nahezu überall auf. Die Sprache der Bündel hilft Ihnen, solche Situationen zu erkennen, Eigenschaften zu benennen, und passende Werkzeuge anzusetzen, hier vor allem der grundlegende Begriff der (lokalen) Trivialität.

Welche Bündel sind trivial, welche nicht?

Lösung: (1) Für $E = [-1, 1]^2$ ist $p : E \to B$ ein Produktbündel, also trivial.

(2) Das Bündel $p : E \to B$ ist nicht trivial: Zwar ist $E = \mathbb{D}^2$ homöomorph zu einem Produkt $B \times [-1, +1]$, aber nicht als Bündelisomorphismus! Hindernis: Nicht alle Fasern von p sind untereinander homöomorph.

(3) Der Totalraum ist E ist nicht homöomorph zum Produkt $B \times [-1, 1]$, denn der Punkt $(0, 0)$ trennt E, doch kein Punkt trennt den Produktraum. Noch einfacheres Hindernis: Nicht alle Fasern von p sind homöomorph.

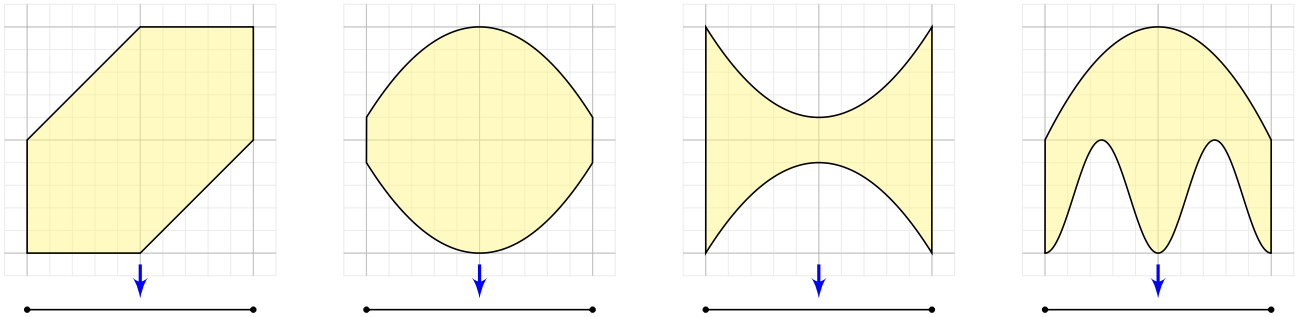
(4) Auch für $E = [-1, 0]^2 \cup [0, 1]^2$ ist p nicht trivial: Zwar sind alle Fasern Intervalle und untereinander homöomorph, aber E ist nicht homöomorph zum Produkt. Hindernis: Der Punkt $(0, 0)$ trennt E. Alternativ siehe (5).

(5) Auch hier ist das Bündel $p : E \to B$ nicht trivial. Zwar ist der Totalraum E homöomorph zum Produkt $B \times [-1, +1]$, aber nicht als Bündelisomorphismus! Hindernis: Die Abbildung p ist nicht offen.

Übung: Jede Produktbündelprojektion $q : B \times F : (x, u) \mapsto x$ ist offen. Somit ist jedes lokal-triviale Bündel $p : E \to B$ eine offene Abbildung.

Kartesische Normalbereiche sind triviale Bündel.

M011
Erläuterung



Sei $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und hierauf $g, h : B \to \mathbb{R}$ stetig mit $g < h$, also $g(x) < h(x)$ für alle $x \in B$. Dies definiert den **Normalbereich**

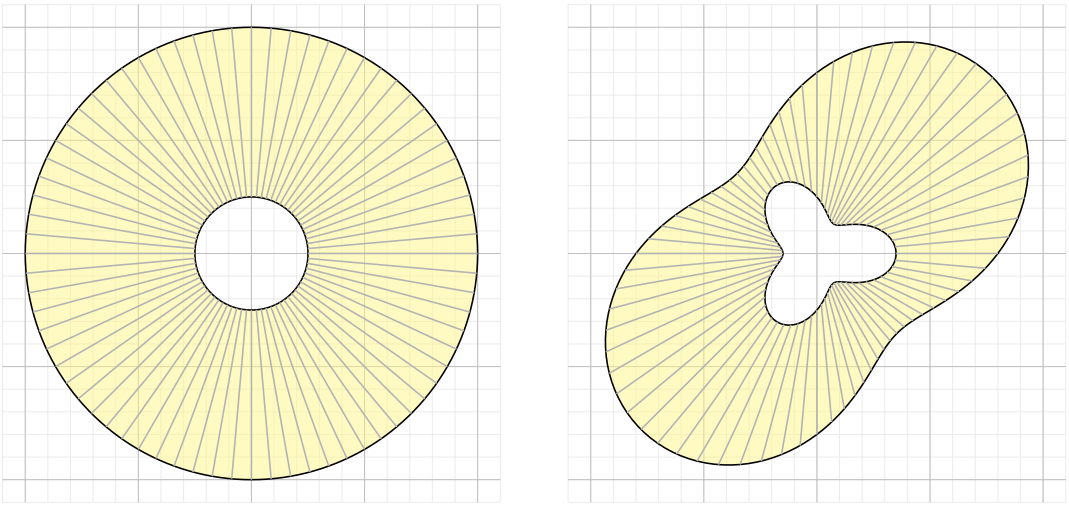
$$E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B,\ g(x) \le y \le h(x) \,\}.$$

Aufgabe: Trivialisieren Sie das Bündel $p : E \to B : (x, y) \mapsto x$.

Lösung: Wir konstruieren den erforderlichen Bündelisomorphismus $(\tau, \sigma) : B \times [0, 1] \cong E$ durch $\tau(x, u) = (x, (1 - u)g(x) + uh(x))$ und $\sigma(x, y) = (x, (y - g(x))/(h(x) - g(x)))$, also faserweise affin-linear. Diese Abbildungen sind wohldefiniert, stetig da Komposition stetiger Abbildungen, zudem fasererhaltend gemäß $p \circ \tau = q$ und $q \circ h = p$, und schließlich zueinander invers, $\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_E$ und $\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{B \times [0,1]}$.

Sphärische Normalbereiche sind triviale Bündel.

M012
Erläuterung



☺ Dasselbe gelingt offen für $E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B,\ g(x) < y < h(x) \,\}$ durch dieselbe faserweise affine Trivialisierung $(\tau, \sigma) : B \times]0, 1[\cong E$.

☺ Ebenso für den Totalraum $E = \{\, rs \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{S}^1,\ g(s) \le r \le h(s) \,\}$ mit $g, h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ stetig und $0 < g < h$. Als Bündelprojektion betrachten wir hier $p : E \to \mathbb{S}^1 : x \mapsto x/|x|$. Übung: Dies ist ein triviales Bündel.

☺ Normalbereiche dienen in der Analysis zur Integration à la Fubini; man integriert erst über jede Faser, dann das Ergebnis über die Basis.

Die Nennung der Bündelprojektion ist wesentlich.

Aufgabe: Bestimmen Totalraum E und Basis B allein schon das gesamte Bündel $p : E \to B$? Oh, nein! Drastisches Gegenbeispiel: Nennen Sie unendlich viele, paarweise nicht-isomorphe Bündel $p_1, p_2, \ldots : E \to B$ mit gleichem Totalraum E und gleicher Basis B.

Lösung: Unter den vielen möglichen Beispielen hier ein einfaches: Zum Exponenten $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ betrachten wir die komplexe Potenzabbildung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$. Totalraum $E = \mathbb{S}^1$ und Basis $B = \mathbb{S}^1$ sind jeweils gleich, doch die Bündel $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sind paarweise verschieden. Warum? Die Faser $p_n^{-1}(x)$ hat genau n Elemente, daher gilt $p_k \ncong p_n$ für $k \neq n$.

☺ Dies sind Beispiele für Überlagerungen, also lokal-triviale Bündel mit diskreter Faser. Diese sind die Hauptdarsteller dieses Kapitels. Zur besseren Einordnung und zum umfassenderen Verständnis möchte ich zuerst den allgemeinen Kontext der Bündel diskutieren. Das schult unsere geometrische Anschauung und bietet ein reiches Repertoire an Beispielen, inklusiver vieler guter alter Bekannter.

Das Normalenbündel $N\mathbb{S}^n$ über der Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist trivial.

Aufgabe: Das Normalenbündel $N\mathbb{S}^n = \{\, (x, v) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in x\mathbb{R} \,\}$ über der Sphäre $\mathbb{S}^n$ mit Projektion $p : N\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x, v) = x$ ist trivial.

Lösung: Die kanonische Trivialisierung $(\sigma, \tau) : N\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ist hier gegeben durch $\tau(x, u) = (x, xu)$ und $\sigma(x, v) = (x, \langle x \mid v \rangle)$. Nachrechnen!

⚠ Ein triviales Bündel $p : E \to B$ bestimmt seine „typische“ Faser F nur bis auf Homöomorphie. Hierzu dient das folgende einfache Beispiel:

Aufgabe: Die radiale Retraktion $p : E = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n : x \mapsto |x|$ ist ein triviales Bündel. Trivialisieren Sie p mit $F_1 = \mathbb{R}_{>0}$ und mit $F_2 = \mathbb{R}$.

Lösung: (1) Wir haben die Trivialisierung $(\tau, \sigma) : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_{>0} \cong E$ mit Polarkoordinaten $\tau(s, r) = sr$ und Bündelkarte $\sigma(x) = (x/|x|, |x|)$.

(2) Alternativ haben wir die Trivialisierung $(\tau, \sigma) : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \cong E$ mit Polarkoordinaten $\tau(s, r) = s\,\mathrm{e}^r$ und Bündelkarte $\sigma(x) = (x/|x|, \ln|x|)$.

☺ Der Quotient $q : E = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n : x \mapsto [x]$ hingegen ist ein nicht-triviales Bündel, wie die folgende Aufgabe zeigt.

Der projektive Raum und sein tautologisches Geradenbündel

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, etwa $V = \mathbb{K}^{n+1}$, und $V^\sharp = V \setminus \{0\}$. Der projektive Raum $\mathbb{P}(V) = V^\sharp / \mathbb{K}^\times$ entsteht, indem wir Vektoren $u \sim v$ identifizieren, die dieselbe Gerade $u\mathbb{K} = v\mathbb{K}$ aufspannen. Der Quotient $q : V^\sharp \to \mathbb{P}(V)$ ist somit ein Bündel mit Basis $\mathbb{P}(V)$ und Totalraum $V^\sharp$. Die typische Faser ist die „Gerade“ $K^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jeweils ohne Null.

Vielleicht haben Sie sich anfangs gefragt, warum wir die Null immer ausschließen. Das ist für die Konstruktion wesentlich, damit die Geraden disjunkt werden, so wie dies für Äquivalenzklassen / Bahnen nötig ist. Können wir die Null zurückfügen und wirklich Geraden betrachten? Ja!

Beispiel: Über dem Basisraum $B = \mathbb{P}(V)$ betrachten wir den Totalraum $E = \{\, ([u], v) \in \mathbb{P}(V) \times V \mid v \in u\mathbb{K} \,\}$. Die Projektion $\gamma : E \to \mathbb{P}(V)$ mit $([u], v) \mapsto [u]$ ist das **tautologische Bündel** des projektiven Raums $\mathbb{P}(V)$: Die Faser über $[u] \in \mathbb{P}(V)$ ist der aufgespannte Vektorraum $u\mathbb{K} \leq V$.

Dieses Bündel codiert „tautologisch“ die intendierte Konstruktion des projektiven Raums $\mathbb{P}(V)$ als „Raum aller Geraden“ im Vektorraum V.

Das tautologische Geradenbündel ist nicht trivial.

Aufgabe: Das tautologische Geradenbündel $\gamma : E \to \mathbb{RP}^n$ ist nicht-trivial für $n \geq 1$, denn jeder Schnitt $s : \mathbb{RP}^n \to E$ von γ hat eine Nullstelle.

Lösung: Die Komposition $s \circ q : \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n \to E$ ordnet jedem $x \in \mathbb{S}^n$ ein Paar $([x], v(x)) \in E$ mit $v(x) \in x\mathbb{R}$ zu, $v(x) = x \cdot t(x)$ mit $t(x) = \langle x \mid v(x) \rangle$. Die Funktion $t : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig und erfüllt $t(-x) = -t(x)$. Da $\mathbb{S}^n$ zshgd ist, existiert dank Zwischenwertsatz ein $x \in \mathbb{S}^n$ mit $t(x) = 0$. QED

Aufgabe: Das Geradenbündel $\gamma : E \to \mathbb{RP}^1$ ist ein Möbius–Band.

Lösung: Jeden Punkt $([u], v) \in E$ des Totalraums können wir schreiben als $([(\cos\theta, \sin\theta)], t(\cos\theta, \sin\theta))$ mit den Koordinaten $\theta \in [0, \pi]$ und $t \in \mathbb{R}$. Diese Schreibweise ist fast eindeutig, bis auf die Identifizierung von $([(\cos 0, \sin 0)], +t(\cos 0, \sin 0))$ mit $([(\cos\pi, \sin\pi)], -t(\cos\pi, \sin\pi))$. Wir erhalten demnach E aus dem Produktraum $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ durch Identifikation von $(0, t)$ mit $(\pi, -t)$. Das ist ein Möbius–Band! QED

John W. Milnor, James D. Stasheff: *Characteristic Classes.* Annals of Mathematics Studies 76, Princeton University Press 1974, Theorem 2.1

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Aufgabe: Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ trivial?

Lösung: (0) Für $n = 0$ ist $p : T\mathbb{S}^0 = \mathbb{S}^0 \times \{0\} \to \mathbb{S}^0$ ein Produktbündel.

(1) Für $n = 1$ ist $p : T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *kein* Produktbündel, aber trivialisierbar!

$$\tau : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} T\mathbb{S}^1 : (z, u) \mapsto (z, ziu)$$

Dies ist wohldefiniert dank $\langle z \,|\, ziu \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{re}(\overline{z} \cdot z\mathrm{i} \cdot u) = 0$. Anschaulich ist das vollkommen klar, zumindest im Nachhinein: Auf z steht $z\mathrm{i}$ senkrecht. Die Umkehrung von τ ist die Bündelkarte $\sigma(z, v) = (z, (z\mathrm{i})^{-1}v)$.

(2) Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ ist nicht trivial: Satz vom Igel!

Beweis: Angenommen es gäbe eine Trivialisierung $(\sigma, \tau) : T\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2$. Auf dem Produktbündel $q : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ ist $h : (x, u) \mapsto (x, u + e_1)$ stetig und erfüllt $q \circ h = q$. Auf der Sphäre $\mathbb{S}^2$ betrachten wir das Nullvektorfeld $r : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2 : x \mapsto (x, 0)$. Dann ist $s := \tau \circ h \circ \sigma \circ r : \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$ stetig und erfüllt $p \circ s = \ldots = p \circ r = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^2}$. Dieses Vektorfeld s verschwindet nirgends, da $s(x) \neq r(x)$ für alle $x \in \mathbb{S}^n$ gilt. Das widerspricht dem Satz vom Igel!

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Wörtlich genauso folgt, dass für jede gerad-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \mathbb{S}^6, \ldots$ das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^{2k} \to \mathbb{S}^{2k}$ nicht trivial ist: Gäbe es für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Bündeltrivialisierung, so auch ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, und das widerspricht dem Satz vom Igel.

Ist $n = 2k - 1$ ungerade, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so existieren nirgends-verschwindende Vektorfelder $s : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n : x \mapsto (x, v(x))$, dank der Konstruktion

$$v : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : (x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Für $n = 1$ trivialisiert dies das Bündel $T\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, wie oben gesehen. Allgemein suchen wir möglichst viele Vektorfelder $s_1, \ldots, s_\ell : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$, sodass über jedem Fußpunkt $x \in \mathbb{S}^n$ die Vektoren $v_1(x), \ldots, v_\ell(x) \in T_x\mathbb{S}^n$ linear unabhängig sind. Im Idealfall $\ell = n$ erhalten wir in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ eine Basis $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ von $T_x\mathbb{S}^n$; dies trivialisiert $T\mathbb{S}^n$, und die Sphäre $\mathbb{S}^n$ heißt **parallelisierbar**. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{S}^n$ parallelisierbar?

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Beispiel: Die Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ wird parallelisiert durch

$$s(x) = (x, v(x)) \quad \text{mit} \quad v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1).$$

Geometrisch betrachtet ist dies eine Rotation um eine Vierteldrehung; algebraisch entspricht dies der Multiplikation mit i in $\mathbb{C}$. Ebenso wird $\mathbb{S}^1$ parallelisiert durch jedes Vektorfeld $\tilde{s}(x) = (x, g(x)v(x))$ mit $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^*$.

Beispiel: $\mathbb{S}^3$ ist parallelisierbar durch

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3), \\ v_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2), \\ v_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1). \end{aligned}$$

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-\mathrm{j}$
j	j	$-\mathrm{k}$	$-e$	i
k	k	j	$-\mathrm{i}$	$-e$

Diese Konstruktion entspringt den Quaternionen $\mathbb{H}$: Wir identifizieren $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$ vermöge $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 e + x_2 \mathrm{i} + x_3 \mathrm{j} + x_4 \mathrm{k}$. Obige Tabelle definiert die Multiplikation, assoziativ, nullteilerfrei. Die orthogonalen Vektorfelder v_1, v_2, v_3 entsprechen der Linksmultiplikation mit $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$.

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Beispiele: $\mathbb{S}^7$ ist parallelisierbar durch

$$\begin{aligned} v_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, -x_8, x_7), \\ v_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= (-x_3, x_4, x_1, -x_2, -x_7, -x_8, x_5, x_6), \\ v_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= (-x_4, -x_3, x_2, x_1, -x_8, x_7, -x_6, x_5), \\ v_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= (-x_5, x_6, x_7, x_8, x_1, -x_2, -x_3, -x_4), \\ v_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= (-x_6, -x_5, x_8, -x_7, x_2, x_1, x_4, -x_3), \\ v_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= (-x_7, -x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, x_1, x_2), \\ v_8(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) &= (-x_8, x_7, -x_6, -x_5, x_4, x_3, -x_2, x_1). \end{aligned}$$

Diese Konstruktion entspringt den Oktaven $\mathbb{O}$ (B4H). Wir identifizieren dazu $\mathbb{R}^8 \xrightarrow{\sim} \mathbb{O}$ vermöge $(x_1, \dots, x_8) \mapsto x_1 e_1 + \dots + x_8 e_8$. Die orthogonalen Vektorfelder $v_2, \dots, v_8$ entsprechen der Linksmultiplikation mit $e_2, \dots, e_8$.

Übung: Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ durch die angegebenen Vektorfelder parallelisiert werden. Nutzen Sie, dass $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ nullteilerfrei sind.

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Wir kennen nun die Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ und können diese für $n = 0, 1, 3, 7$ parallelisieren. Dies führt uns zu der Frage, welche Sphären parallelisierbar sind, über die klassischen Beispiele $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$ hinaus. Das sieht man, ich betone es gern, den Bündeln keinwegs direkt an.

Die gerade-dimensionalen Sphäre sind klar nach dem Satz vom Igel. Die ersten offenen Fälle sind demnach die Sphären $\mathbb{S}^5, \mathbb{S}^9, \mathbb{S}^{11}, \mathbb{S}^{13}, \ldots$. Diese erweisen sich tatsächlich als nicht parallelisierbar, doch ein Hindernis ist zunächst keineswegs offensichtlich!

Heinz Hopf zeigte 1940 mit der Kohomologie der projektiven Räume $\mathbb{RP}^n$, dass die Parallelisierbarkeit von $\mathbb{S}^n$ höchstens für $n = 2^k - 1$ möglich ist. Dies war ein erster phänomenaler Erfolg, der die meisten Fälle negativ beantwortete. Eine explizite Konstruktion in den verbleibenden Fällen $n = 15, 31, 63, \ldots$, analog zur obigen für $n = 0, 1, 3, 7$, gelang jedoch nicht.

Welche Sphären sind parallelisierbar?

Die abschließende Antwort gaben 1958 Michel Kervaire und John Milnor dank dem kurz zuvor bewiesenen Periodizitätssatz von Raoul Bott. Damit kommt eine klassische Frage zu ihrem würdigen Abschluss:

Satz J5L: Bott–Milnor 1958, Kervaire 1958

Folgende Aussagen gelten nur in Dimension $n = 1, 2, 4, 8$:
(a) Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist eine reelle Divisionsalgebra.
(b) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist parallelisierbar.
(c) Die Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ ist ein Hopf–Raum.

📖 Heinz-Dieter Ebbinghaus *et al*: *Zahlen*. Springer 1992. Das Kapitel „Divisionsalgebren und Topologie“ von Friedrich Hirzebruch stellt die mathematischen Grundideen und ihre historische Entwicklung dar.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektorfelder

Allgemeiner als die Parallelisierbarkeit stellt sich die Frage: Wie viele Vektorfelder $s_1, \dots, s_k : \mathbb{S}^n \to T\mathbb{S}^n$ sind möglich, sodass $s_1(x), \dots, s_k(x)$ linear unabhängig sind in jedem Punkt $x \in n$? Da jeder Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ Dimension n hat, gilt $0 \leq k \leq n$. Im Falle $k = n$ erhalten wir in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ eine Basis $s_1(x), \dots, s_n(x)$ von $T_x\mathbb{S}^n$, damit wird $\mathbb{S}^n$ parallelisiert. Durch explizite Konstruktion konnten Johann Radon 1922 und Adolf Hurwitz 1923 die folgende untere Schranke zeigen:

Satz J5M: Radon 1922, Hurwitz 1923

Sei $n = u2^{4a+b}$ mit $u \in 2\mathbb{N} + 1$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann existieren mindestens $k = 8a + 2^b - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$.

Für ungerade n gilt $u = n$ und $a = b = 0$ und so ergibt sich hier die Zahl 0. Dies entspricht dem Satz vom Igel, denn auf $\mathbb{S}^{n-1}$ hat jedes Vektorfeld eine Nullstelle. Demnach ist hier $k = 0$ der *exakte* Wert. Darüber hinaus sind obere Schranken und damit Hindernisse notorisch schwierig.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektorfelder

Für gerade n haben wir dank Radon–Hurwitz die folgenden unteren Schranken, die die Parallelisierbarkeit der Sphären $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^7$ beinhalten:

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
u	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	11	3	13	7	15	1
a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
b	1	2	1	3	1	2	1	0	1	2	2	3	1	2	1	1
$8a + 2^b - 1$	1	3	1	7	1	3	1	8	1	3	1	7	1	3	1	9

Auch hier stellt sich die Frage, ob man diese Werte noch verbessern kann. Sie blieb lange unbeantwortet. Die obigen Werte sind tatsächlich optimal, wie Frank Adams 1962 schließlich beweisen konnte:

Satz J5N: Adams 1962

Sei $n = u2^{4a+b}$ mit $u \in 2\mathbb{N} + 1$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann existieren höchstens $k = 8a + 2^b - 1$ linear unabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$.

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

Globale Trivialisierung ist meist zu viel verlangt, lokal genügt oft. Wir wollen also Bündel lokalisieren, und dies gelingt ganz einfach:

Sei $p : E \to B$ ein Bündel. Über $B' \subseteq B$ haben wir $E' := p^{-1}(B')$ und somit das **eingeschränkte Bündel** $p|B' := p^{B'}_{E'} : E' \to B'$.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, hook, "f=\mathrm{inc}^{E}_{E'}"] \arrow[d, "p'=p|U"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, hook, "g=\mathrm{inc}^{B}_{B'}"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Das ist ein Spezialfall der **Zurückziehung** (engl. *pull back*): Sei $g : B' \to B$ eine beliebige stetige Abbildung. Wir können jedes Bündel $p : E \to B$ zurückziehen zu einem Bündel $g^*p := p' : E' \to B'$. Dieses ist definiert durch den Totalraum $E' = \{\, (b', e) \in B' \times E \mid g(b') = p(e) \,\}$ mit der Bündelprojektion $p' : E' \to B' : (b', e) \mapsto b'$. Über $g : B' \to B$ erhalten wir den Bündelmorphismus $(f, g) : p' \to p$ mit $f : E' \to E : (b', e) \mapsto e$.
Übung: Im Falle $g = \mathrm{inc}^{B}_{U}$ sind g^*p und $p|U$ kanonisch isomorph.

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

Aufgabe: Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist trivial über $U \subsetneq \mathbb{S}^n$.

Das ist eine grundlegende Konstruktion der Differentialgeometrie: Für jede glatte Mfkt M ist das Tangentialbündel $TM \to M$ lokal-trivial.

Lösung: Nach Drehung gelte $U \not\ni (0, \dots, 0, 1) =: N$. Wir nutzen die vertraute und stets hilfreiche stereographische Projektion (A1L):

$$f : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)/(1 - x_{n+1}),$$
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (2y_1, \dots, 2y_n, |y|_2^2 - 1)/(|y|_2^2 + 1).$$

Zu $x \in U$ und $y = f(x)$ haben wir $g'(y) : T_y\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T_x\mathbb{S}^n$: Die Ableitung $g'(y)$ ist ein linearer Isomorphismus. Wir erhalten die Trivialisierung

$$\tau : U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} TU : (x, u) \mapsto (x, g'(f(x))u).$$

Hier ist $TU = p^{-1}(U) = \{\, (x, v) \in U \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x \mid v \rangle = 0 \,\}$ der Totalraum des eingeschränkten Tangentialbündels $p|U : TU \to U$. Das Bündel p lässt sich (für $n \neq 0, 1, 3, 7$) nicht global trivialisieren, doch lokal gelingt es!

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

Sei $p : E \to B$ ein Bündel. Ein **Bündelatlas** $\mathscr{A} = (\tau_i)_{i \in I}$ mit Faser F besteht aus lokalen Trivialisierungen $\tau_i : U_i \times F \xrightarrow{\sim} p|U_i$ für $i \in I$ über einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ des Basisraums B.

Existiert solch ein Atlas, so nennen wir das Bündel $p : E \to B$ **lokal-trivial** oder ein **Faserbündel** über B mit Faser F.

Beispiel: Das Tangentialbündel $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ ist lokal-trivial mit $F = \mathbb{R}^n$. Wir haben oben lokale Trivialisierungen $\tau_i : U_i \times F \xrightarrow{\sim} p|U_i$ konstruiert. Daraus können wir einen Atlas bilden, schon zwei Karten genügen. Mit einer einzigen Karte gelingt es nur für $n = 0, 1, 3, 7$.

Über jedem Punkt $x \in B$ ist die Faser $F_x = p^{-1}(x)$ homöomorph zu F: Lokal, für $x \in U_i$, erhalten wir $\tau_{i,x} : F \cong \{x\} \times F \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x) = F_x$. Wir nennen F die **Standardfaser** und schreiben kurz $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$.

Bei einem **$\mathbb{R}$–Vektorraumbündel** $p : E \to B$ tragen F und jede Faser F_x die Struktur eines $\mathbb{R}$–Vektorraumes, und jede Trivialisierung τ_i ist faserweise ein $\mathbb{R}$–Vektorraumisomorphismus $\tau_{i,x} : F \xrightarrow{\sim} F_x$.

Was ist ein lokal-triviales Bündel?

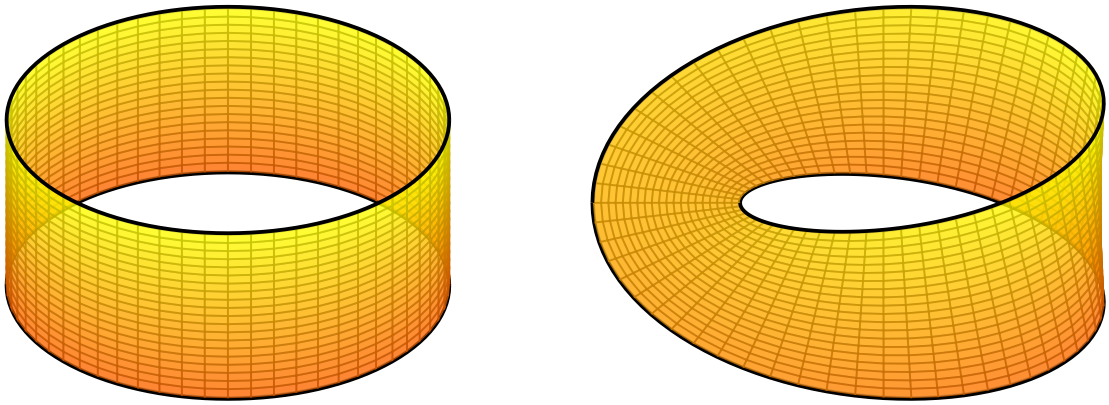
Für Indizes $i, j \in I$ setzen wir $U_{ij} = U_{ji} := U_i \cap U_j \subseteq B$ und erhalten hierüber den **Kartenwechsel** $t_{ij} := (\tau_j|_{U_{ji}})^{-1} \circ (\tau_i|_{U_{ij}}) : U_{ij} \times F \xrightarrow{\sim} U_{ji} \times F$. Punktweise über $x \in U_{ij}$ wird die Faser demnach transformiert durch den Homöomorphismus $t_{ij,x} : F \cong \{x\} \times F \xrightarrow{\sim} \{x\} \times F \cong F$.

Oft trägt die Standardfaser F zusätzliche Struktur, sie ist zum Beispiel ein $\mathbb{R}$–Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, evtl. orientiert oder mit Skalarprodukt $\langle \text{-}|\text{-} \rangle$ etc. Wir wollen, dass diese Struktur bei Kartenwechseln erhalten bleibt! Nur so können wir zusätzliche Struktur kartenunabhängig nutzen.

Dies codieren wir durch die **Strukturgruppe** $G \subseteq \operatorname{Homeo}(F)$ der erlaubten Koordinatenwechsel, etwa $G = \operatorname{GL}_n \mathbb{R}, \operatorname{GL}_n^+ \mathbb{R}, \operatorname{SO}_n \mathbb{R}$ etc. Ein G–Bündelatlas $\mathscr{A} = (\tau_i)_{i \in I}$ respektiert die Strukturgruppe wie folgt: Zu je zwei Indizes $i, j \in I$ und für jeden Punkt $x \in U_{ij}$ gilt $\tau_{ij,x} \in G$.

Beispiel: Für $p : T\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ konstruieren wir oben den Atlas $\mathscr{A} = (\tau_0, \tau_1)$ mit Faser $\mathbb{R}^n$. Dies ist ein glatter $\operatorname{GL}_n \mathbb{R}$–Bündelatlas, orientiert sogar ein $\operatorname{GL}_n^+ \mathbb{R}$–Bündelatlas. Wir erkennen daran ein allgemeines Prinzip: Wir *reduzieren* die Strukturgruppe und *erhöhen* die erhaltene Struktur.

Beispiel: getwistete Produkte $\mathbb{S}^1 \ltimes F$



Sei (F, α) ein Raum F mit Homöomorphismus $\alpha : F \xrightarrow{\sim} F$. Im Raum $\mathbb{R} \times F$ identifizieren wir $(x, y) \sim (x + k, \alpha^k(y))$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times F$ und $k \in \mathbb{Z}$; der Quotient ist das **getwistete Produkt** $\mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} F := (\mathbb{R} \times F)/_\sim$ mit Twist α.

(1) Für $F = \mathbb{R}$ und $\alpha = +\mathrm{id}_\mathbb{R}$ erhalten wir den Zylindermatel: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$
(2) Für $F = \mathbb{R}$ und $\alpha = -\mathrm{id}_\mathbb{R}$ erhalten wir das Möbius–Band: $\mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} \mathbb{R}$
(3) Für $F = \mathbb{S}^1$ und $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ erhalten wir den Torus: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
(4) Für $F = \mathbb{S}^1$ und $\alpha = \mathrm{conj}$ erhalten wir die Kleinsche Flasche: $\mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} \mathbb{S}^1$

Beispiel: getwistete Produkte $\mathbb{S}^1 \ltimes F$

Aufgabe: Die Projektion $p : \mathbb{S}^1 \overset{\alpha}{\ltimes} F \to \mathbb{S}^1 : [x, y] \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}$ ist wohldefiniert, stetig, lokal-trivial, für $F = \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ ein Vektorraumbündel.

Beispiel: getwistete Produkte $\mathbb{S}^1 \ltimes F$

☺ Zylinder und Möbius–Band sind dank dieser Konstruktion sogar Vektorraumbündel. Diese wertvolle Struktur ist aus der üblichen Graphik nicht sofort ersichtlich, jetzt schon. *Once you see it, you cannot unsee it!*

Der Zylinder $Z \to \mathbb{S}^1$ ist trivial über ganz $\mathbb{S}^1$. Das Möbius–Band $M \to \mathbb{S}^1$ hingegen ist nicht trivial, nur lokal-trivial. In beiden ist die Mittelachse $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow Z$ bzw. $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow M$ ein starker Deformationsretrakt. Wir sehen jetzt den tieferen Grund: Dies gilt ganz allgemein für Vektorraumbündel!

Aufgabe: Sei $q : E \to B$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraumbündel. Über jedem $x \in B$ sei $A_x \subseteq F_x$ sternförmig zu 0. Wir erhalten so das Teilbündel $p : A \to B$ mit dem Totalraum $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ und dem Nullschnitt $s : B \to A : x \mapsto (x, 0)$ Zeigen Sie, dass $(s, p) : B \rightleftarrows A$ ein starker Deformationsretrakt ist.

Lösung: Wir haben $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Zudem haben wir $s \circ p \simeq \mathrm{id}_A$ dank der faserweise affinen Homotopie $H : [0,1] \times A \to A$ mit $H(t; (x, v)) = (x, tv)$. Dies ist zunächst nur lokal in Karten gegeben, doch global wohldefiniert, da die Vektorraumstruktur bei Kartenwechseln respektiert wird!

Bündel als getwistete Produkte

Auch allgemein wollen wir uns ein Faserbündel $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ als ein getwistetes Produkt $E = B \ltimes F$ vorstellen: Lokal ist das Bündel trivial, aber global werden diese Bausteine nicht-trivial miteinander verklebt. Der Twist kann hierbei noch sehr viel komplizierter ausfallen, als das einfachste Beispiel $B = \mathbb{S}^1$ vorerst erahnen lässt.

Bündel sind faszinierende Objekte und ein mächtiges Werkzeug: Man kann einen topologischen Raum B studieren durch die Bündel über B. Ein wichtiger Spezialfall sind Überlagerungen (Kapitel M). Dies sind gerade die lokal-trivialen Bündel $p : E \to B$ mit diskreter Faser F. Dieser Fall ist eng mit der Fundamentalgruppe verwoben (Kapitel L).

Zwischen der Gruppe $\pi_1(B, b_0)$ und Überlagerungen $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ besteht eine wunderschöne Dualität, die Galois–Korrespondenz. Dieses Zusammenspiel setzt sich für die höheren Homotopiegruppen π_n fort zur langen exakten Homotopiesequenz von Faserbündeln.

Was ist eine Überlagerung?

Jede **Überlagerung** $p : \tilde{X} \to X$ sieht lokal aus wie ein Pfannkuchenstapel:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \supseteq \tilde{U} = p^{-1}(U) & \left\{ \begin{array}{c} \tilde{U}_3 \quad \bullet\, \tilde{x}_3 \\ \tilde{U}_2 \quad \bullet\, \tilde{x}_2 \\ \tilde{U}_1 \quad \bullet\, \tilde{x}_1 \end{array} \right. & \tilde{U}_i \\ \Big\downarrow p \quad \Big\downarrow & & p|^{U}_{\tilde{U}_i} \Big\downarrow \cong \\ X \supseteq U \text{ offen} & \left\{ \begin{array}{c} U \quad \bullet\, x \end{array} \right. & U \end{array}$$

Die Abbildung illustriert die Idee. Diese wollen wir nun formalisieren.

Eine **triviale Überlagerung** ist $q : X \times F \to X : (x, y) \mapsto x$ mit F diskret, wobei der überlagerte Raum X beliebig und die Faser $F \neq \emptyset$ diskret ist.

☺ Wesentlich flexibler und interessanter sind **lokal-triviale** Abbildungen $p : \tilde{X} \to X$; hier verlangen wir nur, dass p lokal homöomorph zu einer trivialen Überlagerung ist. Das präzisieren wir in folgender Definition.

Was ist eine Überlagerung?

Definition M1A: Überlagerung

Sei $p : \tilde{X} \twoheadrightarrow X$ eine stetige Surjektion topologischer Räume.

(0) Eine offene Menge $U \subseteq X$ wird durch p **trivial überlagert**, falls gilt: $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ ist die disjunkte Vereinigung offener Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}$, und jede Einschränkung $p_i := p|^{U}_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to U$ ist ein Homöomorphismus.

Wir nennen p **trivial über** U; mit $U = X$ heißt p **trivial** (über ganz X).

(1) Wir nennen $p : \tilde{X} \to X$ eine **Überlagerung**, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, die von p trivial überlagert wird.

Es gibt dann eine Überdeckung $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ durch offene Mengen $U \subseteq X$ mit p trivial über U. Wir sagen auch kurz, p ist **lokal-trivial über** $(X, \mathcal{U})$.

Wir nennen $\tilde{X}$ den **überlagernden Raum**, X den **überlagerten Raum**, p die **überlagernde Abbildung** und $p^{-1}(x) \subseteq \tilde{X}$ die **Faser** über $x \in X$.

Die **Blätterzahl** $\sharp p^{-1}(x) = \sharp I$ ist lokal konstant, sogar global falls X zshgd. Die Überlagerung p heißt **n–blättrig**, falls $\sharp p^{-1}(x) = n$ für alle $x \in X$ gilt.

Überlagerungen: erste Eigenschaften

Bemerkung: Für jede stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ sind äquivalent:
p ist (1) eine 1–blättrige Überlagerung und (2) ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Die Stetigkeit von $p : \tilde{X} \to X$ muss in M1A nicht gefordert werden: Dank lokaler Trivialität ist p ein lokaler Homöomorphismus. Somit ist p insbesondere stetig und offen und eine Identifizierung (E2L).

Bemerkung: Für jede stetige Abbildung $p : E \to B$ sind äquivalent:
(1) p ist ein Faserbündel mit diskreter Faser F.
(2) p ist eine Überlagerung mit Blätterzahl $\sharp F$

Bemerkung: Ein Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn *jede* Überlagerung $\tilde{X} \to X$ konstante Blätterzahl hat.

Bemerkung: Wird eine offene Menge $U \subseteq X$ durch p trivial überlagert, so ist für jedes $x \in U$ die Faser $p^{-1}(x) = \bigsqcup_{i \in I} \{\tilde{x}_i\}$ diskret.

Übung: Wenn Sie üben wollen, beweisen Sie diese Bemerkungen.

Überlagerungen: erste Eigenschaften

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist eine besonders schöne und einfache Abbildung topologischer Räume. Sie kennen und nutzen schon lange typische Beispiele wie Polarkoordinaten, dazu gleich mehr.

Wir fordern hier von Anfang an, dass p surjektiv ist. Über einem zshgden Basisraum X ist die Blätterzahl konstant. Wäre p nicht surjektiv, so bleibt nur die leere Abbildung $p : \emptyset \to X$. Diese könnten wir zwar zulassen, doch das machte die Formulierung mancher Sätze schwerfälliger.

Warnung: Die Begriffe *Überlagerung* und *Überdeckung* treten hier nebeneinander auf, haben aber rein gar nichts gemeinsam. In englischen Texten heißt 'Überlagerung' *covering map* oder kurz *covering*, und 'Überdeckung' heißt *cover* oder leider auch *covering*. Verwechslungen lassen sich dann nur aus dem Kontext klären. Auf französisch sind *revêtement* und *recouvrement* unmissverständlich. Auf deutsch werden wir *Überlagerung* und *Überdeckung* fein säuberlich auseinanderhalten.

Überlagerungen: erste Beispiele

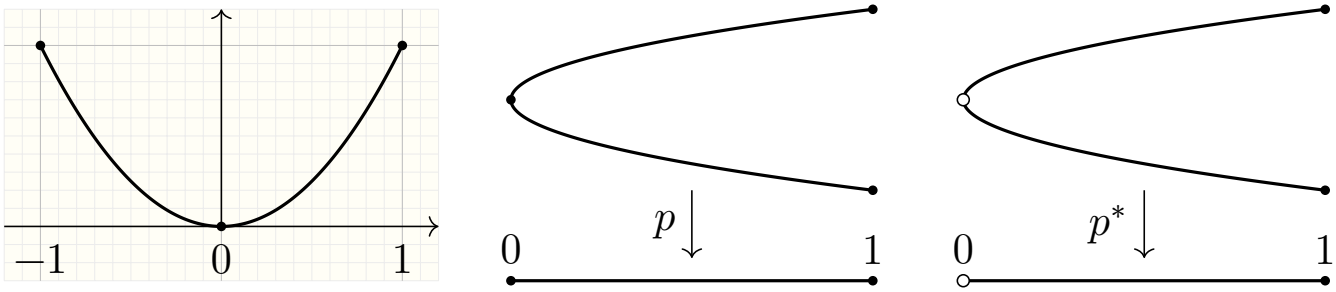
Aufgabe: Ist $p : [0,1] \times \{0,1\} \to [0,1] : (x,y) \mapsto x$ eine Überlagerung?

Lösung: Ja, sogar global trivial: Über $U = [0,1]$ liegt $p^{-1}(U) = \tilde{U}_0 \sqcup \tilde{U}_1$ mit $\tilde{U}_i = U \times \{i\}$, beide offen, und jede der beiden Einschränkungen von p zu $p_i : \tilde{U}_i \to U : (x,y) \mapsto x$ ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe: Ist $p : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] : (x,y) \mapsto x$ eine Überlagerung?

Lösung: Nein, die Faser $p^{-1}(x) = \{x\} \times [0,1]$ ist nicht diskret.
Gemäß Definition liegt bei jeder Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ über jedem Punkt $x \in X$ jedes Urbild $\tilde{x}_i$ diskret in der Faser $p^{-1}(x)$, denn die offene Umgebung $\tilde{U}_i$ schneidet nicht $\tilde{U}_j$ für $j \neq i$, enthält also nicht $\tilde{x}_j$.

Die reelle Quadratabbildung



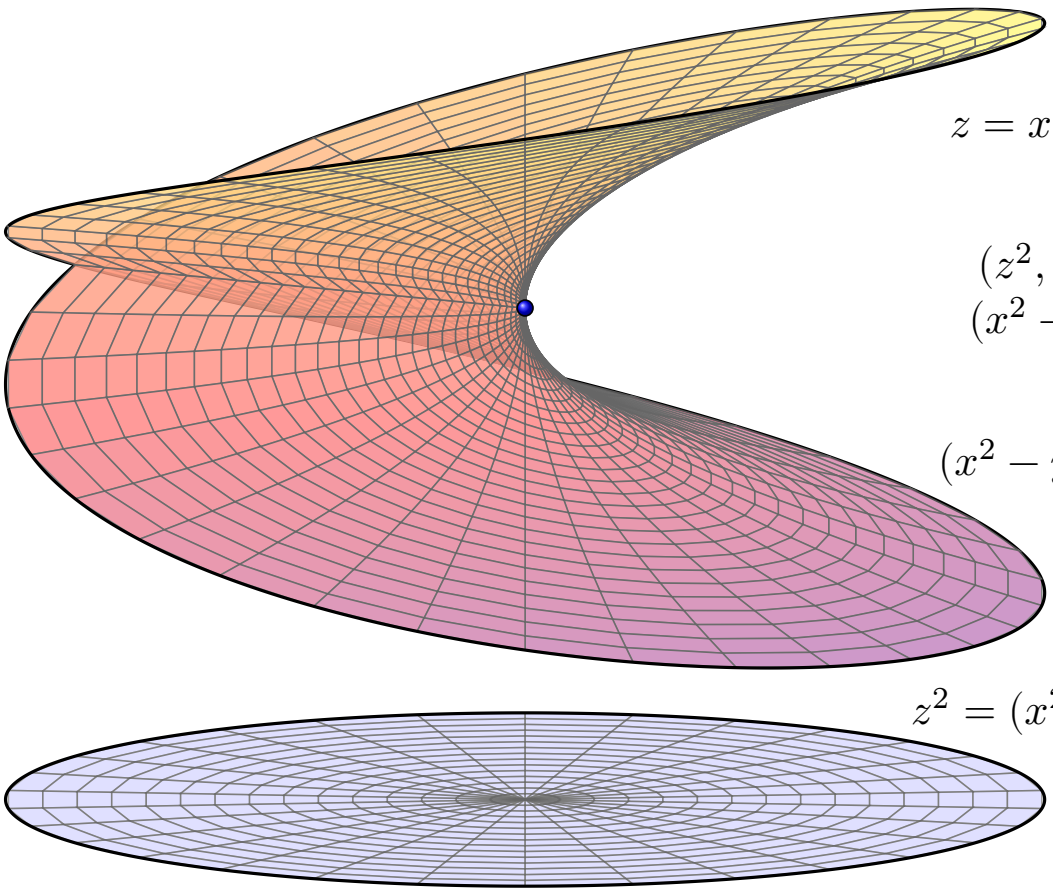
Aufgabe: Ist $p : Y = [-1,1] \to X = [0,1] : x \mapsto x^2$ eine Überlagerung?
Über welchen (offenen) Teilmengen ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ trivial?

⚠ Für die offene Teilmenge $U = [0,1]$ in X ist das Urbild $V = [-1,1]$ offen in Y und homöomorph zu U. Doch Vorsicht, irgendein *beliebiger* Homöomorphismus $V \xrightarrow{\sim} U$ genügt nicht zur lokalen Trivialisierung, er muss durch die Einschränkung von p zu $p|_V^U$ gestiftet werden!

☹ Das ist hier unmöglich, denn $\sharp p^{-1}(0) = 1$, aber $\sharp p^{-1}(x) = 2$ für $x > 0$.

☺ Daher ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^2$ *keine* Überlagerung. Immerhin ist p trivial über jeder Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}_{>0}$: Hier gilt $p^{-1}(U) = V_- \sqcup V_+$ mit $(p_\pm, r_\pm) : V_\pm \cong U$ mit $p_\pm(x) = x^2$ und den beiden Zweigen $r_\pm(x) = \pm\sqrt{x}$.

Die komplexe Quadratabbildung



$$z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{C}$$
$$\downarrow$$
$$(z^2, z) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$$
$$(x^2 - y^2, 2xy, x, y)$$
$$\downarrow$$
$$(x^2 - y^2, 2xy, x) \in \mathbb{R}^3$$
$$\Big\downarrow p$$
$$z^2 = (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{D}^2$$

Die komplexe Quadratabbildung

Aufgabe: Ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ eine Überlagerung? und $p^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$? Finden Sie maximale offene Teilmengen U, über denen p trivial ist.

Lösung: (1) Die Abbildung p ist stetig und surjektiv, aber nicht lokal-trivial um 0, denn $\sharp p^{-1}(0) = 1$ und $\sharp p^{-1}(z) = 2$ für $z \neq 0$.

(2) Die Abbildung p^* ist eine Überlagerung: Sie ist trivial über jeder geschlitzten Ebene $U_\Theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}\,\mathbb{R}_{\leq 0}$ mit $\Theta \in \mathbb{R}$: Jedes Element $z \in U_\Theta$ schreibt sich eindeutig $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \,]\Theta - \pi, \Theta + \pi[$. Dazu gehören die beiden Wurzelzweige $r_{\Theta,\pm}(z) = \pm\sqrt{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2}$.

Allgemein: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ keine Überlagerung, wohl aber $p_n^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* : z \mapsto z^n$, dank der n Wurzelzweige,

$$r_\Theta : U_\Theta \times \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\sim} p_n^{-1}(U_\Theta) : (z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, k) \mapsto \rho^{1/n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}\,.$$

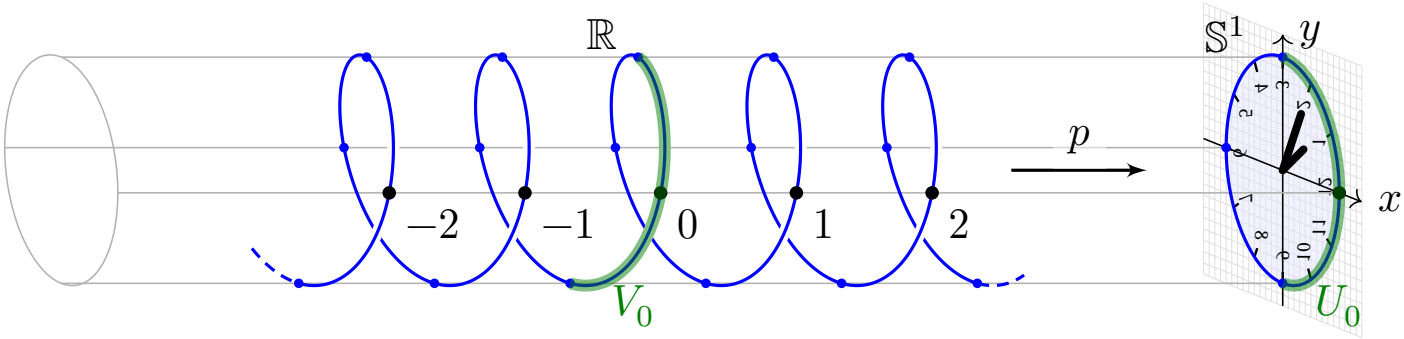
Hier ist $C^* = \bigcup_{\Theta\in\mathbb{R}} U_\Theta$ eine offene Überdeckung und p_n ist trivial über jeder dieser offenen Mengen U_Θ dank der obigen Trivialisierung.

☺ Das drängt uns zu der Frage, wie Polarkoordinaten und die komplexe Exponentialfunktion hier als Überlagerungen genutzt werden...

Polarkoordinaten: die Mutter aller Überlagerungen

Aufgabe: Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ ist eine Überlagerung.

☺ Die folgende Skizze macht die Aussage anschaulich plausibel.
Wie immer lohnt es sich, alle nötigen Daten sorgsam zu explizieren.



Lösung: Global ist „$p^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \ln(z)$“ grober Unfug! Dies gelingt lokal:

$$V_0 := \,]{-1/4}, 1/4[, \qquad U_0 := \{\, (x,y) \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0 \,\},$$
$$p_0 : V_0 \xrightarrow{\sim} U_0 : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \qquad s_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 : (x,y) \mapsto \tfrac{1}{2\pi} \arctan\!\left(\tfrac{y}{x}\right).$$

Wir erhalten die lokale Trivialisierung $(\tau_0, \sigma_0) : U_0 \times \mathbb{Z} \cong p^{-1}(U_0)$
mit $\tau_0(z,k) = s_0(z) + k$ und $\sigma_0(t) = (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \lfloor t \rceil)$.

Polarkoordinaten: die Mutter aller Überlagerungen

☺ Ausgehend von $\theta = 0$ gilt dies ebenso für jeden Winkel $\theta \in \mathbb{R}$:
Wir verschieben V_0 um $\theta \in \mathbb{R}$ zu $V_\theta := V_0 + \theta = \,]\theta - 1/4, \theta + 1/4[$ und
drehen U_0 um $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \theta} \in \mathbb{S}^1$ zu $U_\theta := U_0 \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \theta} = \{\, z \in \mathbb{S}^1 \mid \mathrm{re}(z\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \theta}) > 0 \,\}$.
Hier gilt $(p_\theta, s_\theta) : V_\theta \cong U_\theta$ mit $p_\theta(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ und $s_\theta(z) = s_0(z \cdot \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \theta}) + \theta$.

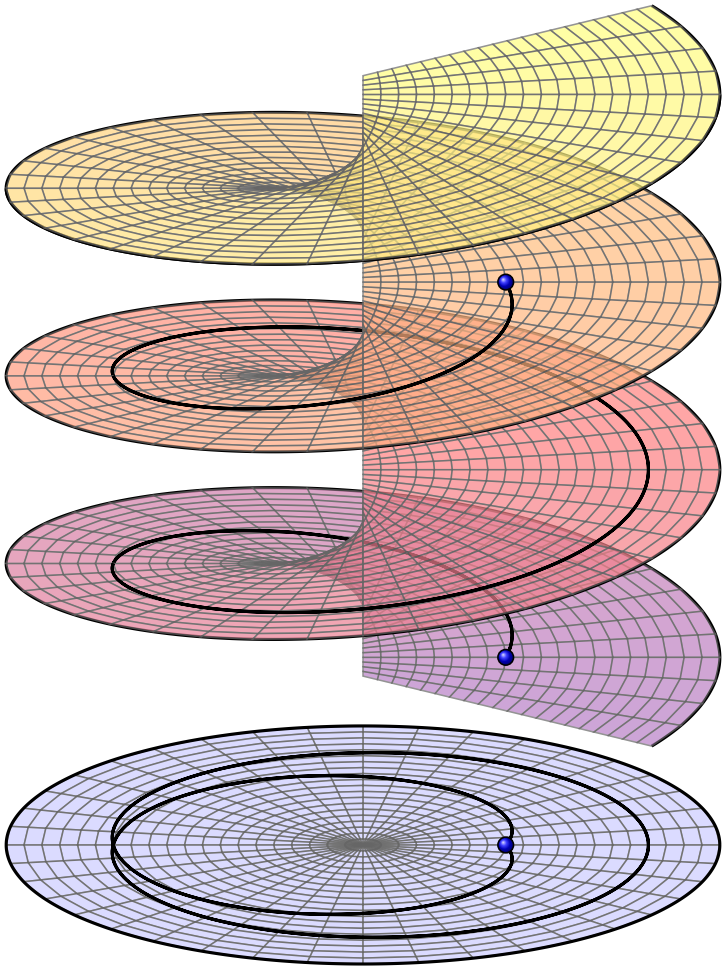
Zusammengefasst erhalten wir eine offene Überdeckung $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} U_\theta$,
über der p lokal-trivial ist. Das Urbild $p^{-1}(U_\theta) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} V_\theta + k$ besteht aus
V_θ und allen Kopien $V_\theta + k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Diese sind paarweise disjunkt.

$$(\tau_\theta, \sigma_\theta) : U_\theta \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_\theta) = V_\theta + \mathbb{Z},$$
$$\tau_\theta(z,k) = s_\theta(z) + k, \qquad \sigma_\theta(t) = (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}, \lfloor t - \theta \rceil).$$

Somit ist p lokal-trivial. Hingegen ist p nicht global trivial!
In der trivialen Überlagerung $q : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1 : (z,k) \mapsto z$ ist der
Totalraum unzusammenhängend. Das gilt für $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ nicht.
Also sind p und q nur lokal isomorph, nicht jedoch global!

Wiederholung: Die kanonische Faktorisierung von p ergibt $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.

Polarkoordinaten als Wendelfläche



Die komplexe Exponentialfunktion

Beispiel M1B: die komplexe Exponentialfunktion

Das Paradebeispiel aus der Analysis ist die Exponentialfunktion

$$\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1) : z \mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!.$$

Dies ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern

$$\mathrm{Ker}(\exp) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = 1 \,\} = 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}.$$

Dies ist eine Überlagerung, ebenso die Kreisparametrisierung

$$p : (\mathbb{R}, +, 0) \to (\mathbb{S}^1, \cdot, 1) : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

Reell ist $(\exp, \ln) : (\mathbb{R}, +, 0) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ ein Homöomorphismus.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"'] \arrow[dr, "\mathrm{quot}"] & \\ \mathbb{C}^\times & \mathbb{C}/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \arrow[l, "\overline{\exp}", "\cong"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\mathrm{quot}"] & \\ \mathbb{S}^1 & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \arrow[l, "\bar{p}", "\cong"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[l, "x+\mathrm{i}y \leftarrow\!\shortmid (x,y)", "\cong"'] \arrow[d, "(x,y) \mapsto"', "(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y})"] \\ \mathbb{C}^\times & \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^1 \arrow[l, "rs \leftarrow\!\shortmid (r,s)", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Zweige des komplexen Logarithmus

Zur Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ erhalten wir (nur) lokal eine Umkehrfunktion durch $\ln : B(1,1) \to \mathbb{C} : 1 + z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k / k$, siehe C5I und M2N. Geht noch mehr? Ja, bis zur topologischen Grenze!

Oben haben wir $(p_\theta, s_\theta) : \mathbb{R} \supseteq V_\theta \cong U_\theta \subseteq \mathbb{S}^1$ explizit konstruiert auf $V_\theta =]\theta - 1/4, \theta + 1/4[$ und $U_\theta = p(V_\theta) = \{ \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} \mid t \in]\theta - 1/4, \theta + 1/4[\}$.

Wir können dies behutsam ausdehnen auf $V_\theta^* =]\theta - 1/2, \theta + 1/2[$ und $U_\theta^* = \mathbb{S}^1 \setminus \{-\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta}\}$ zu $(p_\theta^*, s_\theta^*) : \mathbb{R} \supseteq V_\theta^* \cong U_\theta^* \subseteq \mathbb{S}^1$ durch Verkleben (E1P) $p_\theta^* = p_\theta \cup p_{\theta \pm 1/4}$ und $s_\theta^* = s_\theta \cup s_{\theta \pm 1/4}$, dank Gleichheit auf dem Überlapp.

Für die komplexe Exponentialfunktion betrachten wir $\Theta = 2\pi\theta$ und setzen $W_\Theta = \{ u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C} \mid v \in]\Theta - \pi, \Theta + \pi[\}$ sowie $Z_\Theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} \mathbb{R}_{\leq 0}$. Darauf erhalten wir $(\exp_\Theta, \ln_\Theta) : W_\Theta \cong Z_\Theta$ durch die Einschränkung $\exp_\Theta : w \mapsto z = \exp(w) = \mathrm{e}^u (\cos v + \mathrm{i} \sin v)$ für $w = u + \mathrm{i}v \in W_\Theta$ und umgekehrt $\ln_\Theta : z \mapsto w = \ln|z| + 2\pi \mathrm{i} s_\theta^*(z/|z|)$ für $z = x + \mathrm{i}y \in Z_\Theta$.

Wir nennen $\ln_\Theta$ mit $\Theta \in \mathbb{R}$ einen **Zweig des komplexen Logarithmus**. Wie angegeben gilt $\ln_\Theta \circ \exp_\Theta : w \mapsto z \mapsto w$ und $\exp_\Theta \circ \ln_\Theta : z \mapsto w \mapsto z$.

Geht es noch besser?

Diese Konstruktion zeigt, dass $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ eine Überlagerung ist; sie formalisiert das obige Bild und rechtfertigt unsere Intuition.

Als Dreingabe erhalten wir den zugehörigen **Zweig der $n$ten Wurzel** $r_{n,\Theta} : Z_\Theta \to \mathbb{C} : z \mapsto \exp(\ln_\Theta(z)/n)$, wie oben erklärt und genutzt, als Schnitt zur $n$ten Potenz $p_n(z) = z^n$ gemäß $p_n \circ r_n = \mathrm{id}_{Z_\Theta}$.

Geht es einfacher? Nein, wohl kaum! Größer? Nachweislich nicht!

Aufgabe: Erklären Sie, warum der hier gefundene Definitionsbereich $Z_\Theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta} \mathbb{R}_{\leq 0}$ maximal ist, also nicht erweitert werden kann.

(1) Eine (wie immer stetige!) Logarithmusfunktion $L : \mathbb{C}^\times \supseteq Z \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ L = \mathrm{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ gibt es nur auf Gebieten Z ohne geschlossene Wege um 0.

(2) Eine (stetige!) Wurzelfunktion $r_n : \mathbb{C}^\times \supseteq Z \to \mathbb{C}^\times$ mit $p_n \circ r_n = \mathrm{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gibt es nur auf Gebieten Z ohne geschlossene Wege um 0.

Lösung: Wir setzen unser Beispiel von Seite L215 fort und nutzen die Fundamentalgruppe, ihre Funktorialität und die Umlaufzahl.

Die Fundamentalgruppe als Hindernis

(1) Wir wählen $z_0 \in Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ und $w_0 = L(z_0)$, somit gilt $z_0 = \exp(w_0)$.
Wir finden und nutzen die folgenden kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[d, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[dr, "L"] & & \\
(\mathbb{C}^\times, z_0) & (\mathbb{C}, w_0) \arrow[l, "\exp", "\mathrm{e}^z \leftarrow\!\shortmid z"'] &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\pi_1}{\Longrightarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(Z, z_0) \arrow[d, "\pi_1(\mathrm{inc})"] \arrow[dr, "\pi_1(L)"] & & \\
\pi_1(\mathbb{C}^\times, z_0) \arrow[d, "\cong"', "\deg"] & \pi_1(\mathbb{C}, w_0) \arrow[l, "\pi_1(\exp)"'] \arrow[d, "\cong"'] \\
(\mathbb{Z}, +) & (\{0\}, +) \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}$$

Aus $\exp \circ L = \mathrm{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ folgt: Für jede Schleife γ in (Z, z_0) gilt $\deg(\gamma) = 0$, dank $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ und der Kommutativität des rechten Diagramms.

☺ Zu $Z_\Theta \subseteq \mathbb{C}^\times$ können wir keinen einzigen Punkt mehr hinzufügen!
Für $Z_\Theta \subsetneq Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ existiert eine Schleife γ in (Z, z_0) mit $\deg(\gamma) = 1$.

Die Fundamentalgruppe als Hindernis

(2) Wir wählen $z_0 \in Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ und $w_0 = r_n(z_0)$, somit gilt $z_0 = p_n(w_0)$.
Wir finden und nutzen die folgenden kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
(Z, z_0) \arrow[d, hook, "\mathrm{inc}"] \arrow[dr, "r_n"] & & \\
(\mathbb{C}^\times, z_0) & (\mathbb{C}^\times, w_0) \arrow[l, "p_n", "z^n \leftarrow\!\shortmid z"'] &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\pi_1}{\Longrightarrow} \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(Z, z_0) \arrow[d, "\pi_1(\mathrm{inc})"] \arrow[dr, "\pi_1(r_n)"] & & \\
\pi_1(\mathbb{C}^\times, z_0) \arrow[d, "\cong"', "\deg"] & \pi_1(\mathbb{C}^\times, w_0) \arrow[l, "\pi_1(p_n)"'] \arrow[d, "\cong"', "\deg"] \\
(\mathbb{Z}, +) & (\mathbb{Z}, +) \arrow[l, "\cdot n", "kn \leftarrow\!\shortmid k"']
\end{tikzcd}$$

Aus $p_n \circ r_n = \mathrm{inc}_Z^{\mathbb{C}^\times}$ folgt: Für jede Schleife γ in (Z, z_0) gilt $\deg(\gamma) \in n\mathbb{Z}$, dank $\pi_1 : \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Grp}$ und der Kommutativität des rechten Diagramms.

☺ Zu $Z_\Theta \subseteq \mathbb{C}^\times$ können wir keinen einzigen Punkt mehr hinzufügen!
Für $Z_\Theta \subsetneq Z \subseteq \mathbb{C}^\times$ existiert eine Schleife γ in (Z, z_0) mit $\deg(\gamma) = 1$.

Die komplexe Potenzfunktion

Beispiel M1c: die komplexe Potenzfunktion

Das Paradebeispiel aus der Algebra ist die komplexe Potenzfunktion

$$p_n : (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1) : w \mapsto w^n$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Dies ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.
Die Abbildung p_0 ist konstant, der triviale Homomorphismus.
Ferner ist p_1 die Identität und somit eine triviale Überlagerung.
Auch $p_{-1}(w) = \overline{w}/|w|^2$, als Spiegelung am Einheitskreis und der reellen Achse, ist ein Homöomorphismus, also eine triviale Überlagerung.
Allgemein gilt $w^{-n} = (w^n)^{-1}$, daher betrachtet man of nur $n \geq 1$.
Für $n \neq 0$ ist p_n surjektiv, die $n$ten Einheitswurzeln bilden den Kern

$$\operatorname{Ker}(p_n) = W_n := \{\, \xi \in \mathbb{C} \,|\, \xi^n = 1 \,\} = \{\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n} \,|\, k = 0, 1, \dots, n-1 \,\}.$$

Somit ist p_n eine n–blättrige Überlagerung, ebenso die Einschränkung

$$p_n : (\mathbb{S}^1, \cdot, 1) \to (\mathbb{S}^1, \cdot, 1) : w \mapsto w^n.$$

Die komplexe Potenzfunktion

Komplexe Wurzeln sind extrem nützlich und keineswegs trivial!
Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die n–te Wurzel von $z = 0$ ist $w = 0$ (mit Vielfachheit n).
Die $n$ten Wurzeln von $z = 1$ sind alle $\xi \in \mathbb{C}$ mit $\xi^n = 1$, also obige Menge.
Zu einer beliebigen komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ berechnen wir *eine* Wurzel $w \in \mathbb{C}^\times$ mit $w^n = z$ wie folgt: Wir wählen eine Polardarstellung $z = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $t \in \mathbb{R}$ und erhalten $w = \sqrt[n]{\rho}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}$. Die Probe ist $w^n = z$.
Alle weiteren Lösungen sind dann ξw mit $\xi \in W_n$. Wir nutzen folgende kommutative Diagramme zur universellen Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$:

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}, +) \arrow[dr, "u \mapsto w = \mathrm{e}^{u/n}"] \arrow[dd, "u \mapsto z = \mathrm{e}^u"'] & \\
& (\mathbb{C}^\times, \cdot) \arrow[dl, "z = w^n \mapsfrom w"] \\
(\mathbb{C}^\times, \cdot) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, +) \arrow[dr, "t \mapsto w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t/n}"] \arrow[dd, "t \mapsto z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}"'] & \\
& (\mathbb{S}^1, \cdot) \arrow[dl, "z = w^n \mapsfrom w"] \\
(\mathbb{S}^1, \cdot) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, +) \arrow[dr, "u \mapsto \mathrm{e}^{u/n}"] \arrow[dd, shift right, "\exp"'] & \\
& (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \arrow[dl, shift right, "x^n \mapsfrom x"'] \arrow[ul, shift right, "\rho \mapsto \sqrt[n]{\rho}"'] \\
(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \arrow[ur, shift right, "\ln"'] &
\end{tikzcd}$$

Verzweigte Überlagerungen

Die Potenzfunktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w \mapsto w^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist eine schöne und wichtige Abbildung. Leider ist sie keine Überlagerung im eng gesteckten Sinne unserer Definition M1A, denn keine Umgebung von 0 wird trivial überlagert: Es gilt $p^{-1}(0) = \{0\}$ aber $\sharp p^{-1}(z) = n$ für alle $z \neq 0$.

Die Abbildung p ist vielmehr das Modell einer *verzweigten Überlagerung* wie auf Seite M107 für $n = 2$ gezeigt. Da auch diese Abbildungen in der (mathematischen) Natur auftreten, will ich sie hier nicht verschweigen.

Definition M1D: verzweigte Überlagerung

Sei $p : \tilde{Y} \to Y$ stetig und $X \subseteq Y$ die Vereinigung aller trivial überlagerten offenen Mengen $U \subseteq Y$. Ist X dicht in Y, so nennen wir p eine **verzweigte Überlagerung** (engl. *branched covering* oder *ramified covering*). Dabei heißt $y \in Y \setminus X$ ein **Verzweigungspunkt** und $Y \setminus X$ der **Verzweigungsort**. Im Falle $X = Y$ ist p eine (unverzweigte) Überlagerung.

Verzweigte Überlagerungen

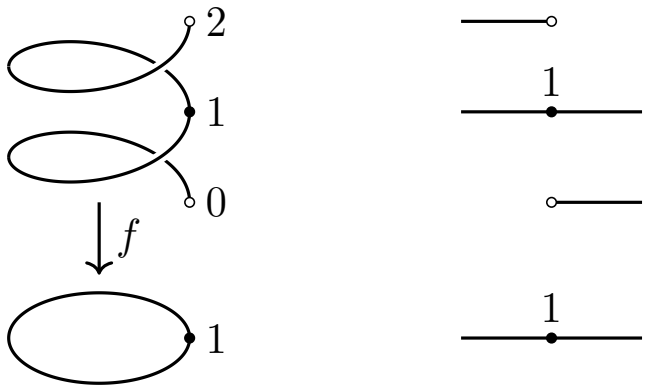
Beispiel: Sei $q : \mathbb{C} \times \{1, \dots, \ell\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $q(w, k) = w^{n_k}$ wobei $n_1, \dots, n_\ell \geq 1$ und $n = n_1 + \cdots + n_\ell$. Über $\mathbb{C}^\times$ ist dies eine n–blättrige Überlagerung. Über dem Verzweigungspunkt 0 hingegen liegen nur ℓ Urbilder, jeweis mit *Verzweigungsindex* $n_1, \dots, n_\ell$.

Diesen allgemeineren Überlagerungsbegriff verwendet man naturgemäß in der Funktionentheorie und in der Algebraischen Geometrie (Formel von Riemann–Hurwitz). Die Überlagerungen im Sinne unserer Definition M1A nennt man dann zur Betonung *unverzweigte* Überlagerungen.

Der Einfachheit halber wollen wir im Folgenden eigentlich nur solche unverzweigten Überlagerungen untersuchen. In realistischen Beispielen treten daneben auch auch verzweigte Überlagerungen auf. Daher ist es hilfreich, auch diese bennenen und dann behandeln zu können.

Lokaler Homöomorphismus ist noch keine Überlagerung.

Jede Überlagerung ist gemäß M1A ein lokaler Homöomorphismus.
Die Umkehrung gilt nicht, wie $]a,b[\hookrightarrow \mathbb{R}$ zeigt. Noch interessanter:



Beispiel M1E: lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung

Die Abbildung $f :]0,2[\to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist stetig und surjektiv und sogar ein lokaler Homöomorphismus, aber keine Überlagerung.

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ wird trivial (zweiblättrig) überlagert. Aber keine offene Umgebung von 1 wird trivial überlagert!

Lokaler Homöomorphismus ist noch keine Überlagerung.

Jede Überlagerung ist gemäß M1A ein lokaler Homöomorphismus.
Die Umkehrung gilt nicht, wie uns obiges Gegenbeispiel M1E lehrt.
Simplizial sind solche Pathologien ausgeschlossen, siehe M1K.
Dies wollen wir auch für kompakte Räume retten, siehe M1F.

? Was macht einen lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung?

Sei $f : \tilde{Y} \to Y$ stetig/$\mathscr{C}^0$. Ein Punkt $\tilde{x} \in \tilde{Y}$ heißt (topologisch/$\mathscr{C}^0$) **regulär**, falls f um den Punkt $\tilde{x}$ ein lokaler Homöomorphismus ist (D3O); andernfalls heißt der Punkt $\tilde{x}$ **singulär** oder **kritisch**.

Wir nennen $x \in Y$ einen (topologisch/$\mathscr{C}^0$) **regulären Wert** von f, falls *jedes* Urbild $\tilde{x} \in f^{-1}(x)$ ein regulärer Punkt ist. Andernfalls heißt x ein **kritischer Wert** von f, das heißt, *mindestens* ein Urbild ist kritisch.

Bemerkung: Für eine $\mathscr{C}^1$–Abbildung f vereinbaren wir $\mathscr{C}^1$–Regularität in $\tilde{x}$ durch die Invertierbarkeit der Ableitung $f'(\tilde{x})$, aka Jacobi–Matrix. Der lokale Umkehrsatz C5Q garantiert die (topologische/$\mathscr{C}^0$) Regularität. Dies ist oft leichter zu prüfen und daher bequemer anzuwenden.

Vom lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung

☺ Jeder lokale Homöomorphismus $f : \tilde{Y} \twoheadrightarrow Y$ zwischen kompakten Hausdorff–Räumen ist eine Überlagerung. Genauer gilt folgendes:

Satz M1F: regulärer Wert

(1) Ist $f : \tilde{Y} \to Y$ eine stetige Abbildung kompakter Hausdorff–Räume, so ist f um jeden regulären Wert $x \in Y$ trivial: Jede hinreichend kleine offene Umgebung wird trivial überlagert, mit endlicher Blätterzahl.

(2) Dank Einpunktkompaktifizierung F4D gilt dies ebenso für jede eigentliche Abbildung lokal-kompakter Hausdorff–Räume.

Beweis: (1) Die Menge $\{x\}$ ist abgeschlossen in Y, also ist die Faser $f^{-1}(x) = \{\tilde{x}_i \mid i \in I\}$ abgeschlossen in $\tilde{Y}$, somit kompakt (F1F).
Zu jedem Urbild $\tilde{x}_i$ existiert eine offene Umgebung $\tilde{W}_i$ in $\tilde{Y}$ mit $W_i = f(\tilde{W}_i)$ offen in Y, sodass die Einschränkung von f einen Homöomorphismus $f_i : \tilde{W}_i \xrightarrow{\sim} W_i$ stiftet. Insbesondere gilt $f^{-1}(x) \cap \tilde{W}_i = \{\tilde{x}_i\}$, somit ist $\tilde{x}_i$ ein isolierter Punkt in $f^{-1}(x)$.

Vom lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung

Kompakt und diskret bedeutet endlich. Sei also $f^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$!.
Da $\tilde{Y}$ hausdorffsch ist, können wir $\tilde{W}_i \cap \tilde{W}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ annehmen.

Wir hätten gerne, dass die offene Menge $W := W_1 \cap \dots \cap W_n$ trivial überlagert wird. Leider ist das Urbild $f^{-1}(W)$ manchmal nicht ganz in $\tilde{W} := \tilde{W}_1 \cup \dots \cup \tilde{W}_n$ enthalten: Im obigen Beispiel M1E ist genau dies das tückische Problem! Wir korrigieren dies nun wie folgt:

Die Menge $V = W \setminus f(\tilde{Y} \setminus \tilde{W})$ ist offen in Y und wird trivial überlagert.

Die Menge $\tilde{A} = \tilde{Y} \setminus \tilde{W}$ ist abgeschlossen in $\tilde{Y}$, also kompakt.
Demnach ist ihr Bild $A = f(\tilde{A})$ in Y kompakt, also abgeschlossen.
Somit ist $Y \setminus A$ offen, ebenso $V = W \setminus A$. Nach Konstruktion gilt $x \in V$ sowie $f^{-1}(V) \subseteq \tilde{W}$, also schließlich $f^{-1}(V) = \tilde{V}_1 \cup \dots \cup \tilde{V}_n$ mit $\tilde{V}_i := f_i^{-1}(V) \subseteq \tilde{W}_i$ und $f_i : \tilde{V}_i \xrightarrow{\sim} V$, wie gewünscht. QED

Vom lokalen Homöomorphismus zur Überlagerung

Beispiel: Die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ ist kompakt hausdorffsch. Die Abbildung $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^n$ ist ein lokaler Homöomorphismus, sogar lokaler Diffeomorphismus um jeden Punkt $z \in \mathbb{S}^1$, denn $p_n'(z)$ ist invertierbar. Dank Satz M1F(1) ist p_n eine Überlagerung mit endlicher Blätterzahl.

Beispiel: Der Raum $\mathbb{C}^\times$ ist lokal-kompakt hausdorffsch. Die Abbildung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$ ist eigentlich und ein lokaler Homöomorphismus, sogar lokaler Diffeomorphismus um jeden Punkt $z \in \mathbb{C}^\times$, denn $p_n'(z)$ ist invertierbar. Dank Satz M1F(2) ist p_n eine endliche Überlagerung.

🙂 Dies haben wir oben bewiesen durch explizite Konstruktion von lokalen Umkehrungen. Satz M1F kann uns diese Arbeit vereinfachen, insbesondere wenn uns die implizite Existenzaussage genügt.

Gegenbeispiel: Auf $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$ lässt sich Satz M1F leider nicht anwenden, da die Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Beides sind Überlagerungen, doch dies müssen wir auf anderen Wegen zeigen, zum Beispiel durch explizite Konstruktion wie oben.

Ausschneiden kritischer Werte

Korollar M1G: Ausschneiden kritischer Werte

Sei $f : \tilde{Y} \to Y$ eigentlich zwischen lokal-kompakten Hausdorff–Räumen.

Dazu sei $\tilde{C} \subseteq \tilde{Y}$ die Menge der kritischen Punkte, in denen f kein lokaler Homöomorphismus ist, und $C = f(\tilde{C})$ die Menge der kritischen Werte. Wir setzen $X := Y \setminus C$ und $\tilde{X} := f^{-1}(X) = \tilde{Y} \setminus f^{-1}(f(\tilde{C}))$.

Dann ist $p = f|_{\tilde{X}}^{X} : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung mit endlicher Blätterzahl.

Beweis: Die Menge $\tilde{C}$ ist abgeschlossen in $\tilde{Y}$. Da f eine abgeschlossene Abbildung ist (F5B), ist auch $f(\tilde{C})$ abgeschlossen. Somit ist $X \subseteq Y$ offen und ebenso $\tilde{X} \subseteq \tilde{Y}$. Dies sind demnach lokal-kompakte Hausdorff–Räume (F3E) und $p : \tilde{X} \to X$ ist eigentlich. Nach Konstruktion ist p ein lokaler Homöomorphismus, also eine Überlagerung (M1F). QED

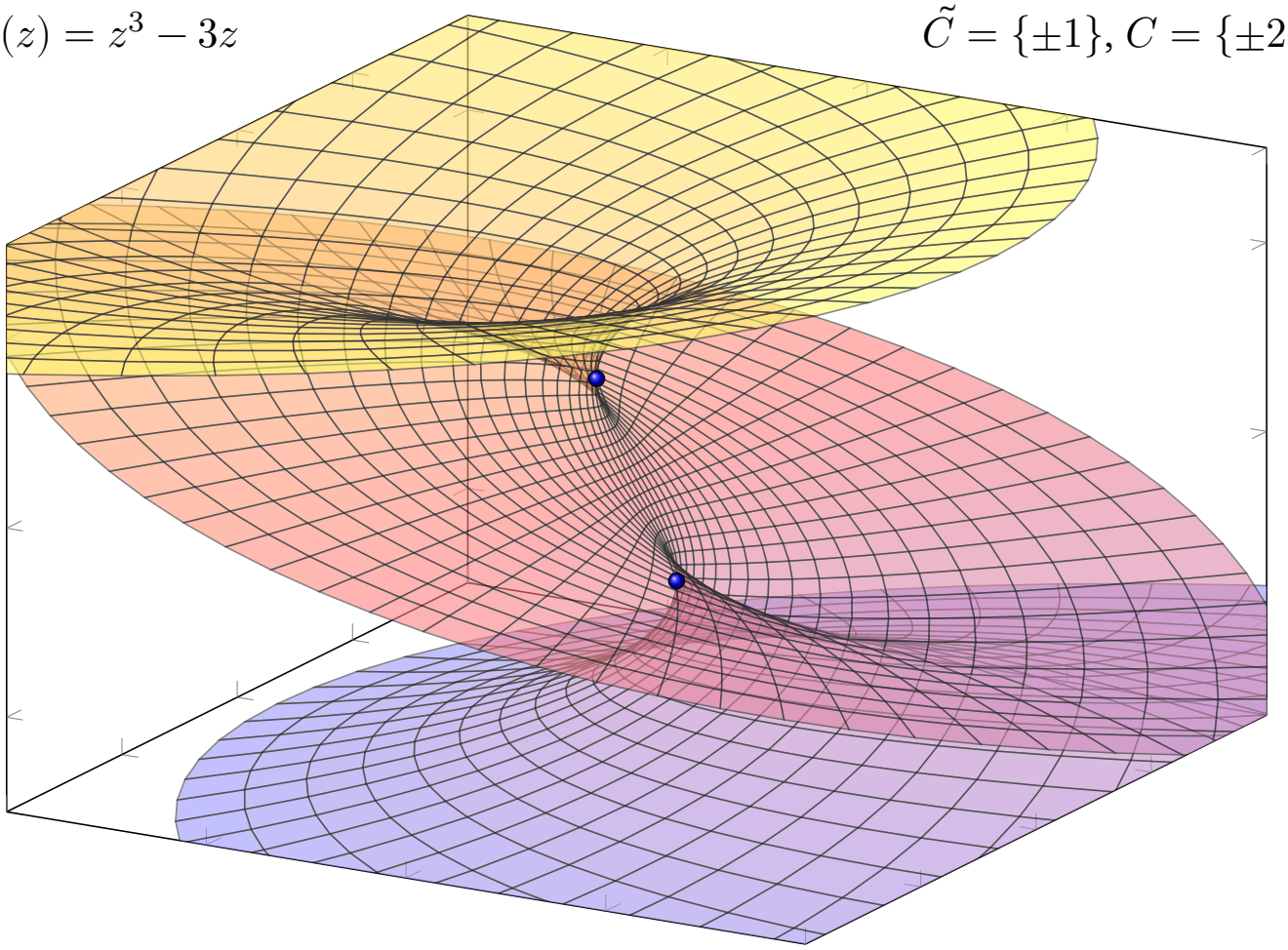
Beispiel: Die Potenzabbildung $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist stetig, für $n \geq 1$ eigentlich, für $n \geq 2$ in 0 kein lokaler Homöomorphismus. Nach Entfernung von 0 erhalten wir die Überlagerung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto z^n$.

Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

M127
Erläuterung

$f(z) = z^3 - 3z$

$\tilde{C} = \{\pm 1\}, C = \{\pm 2\}.$

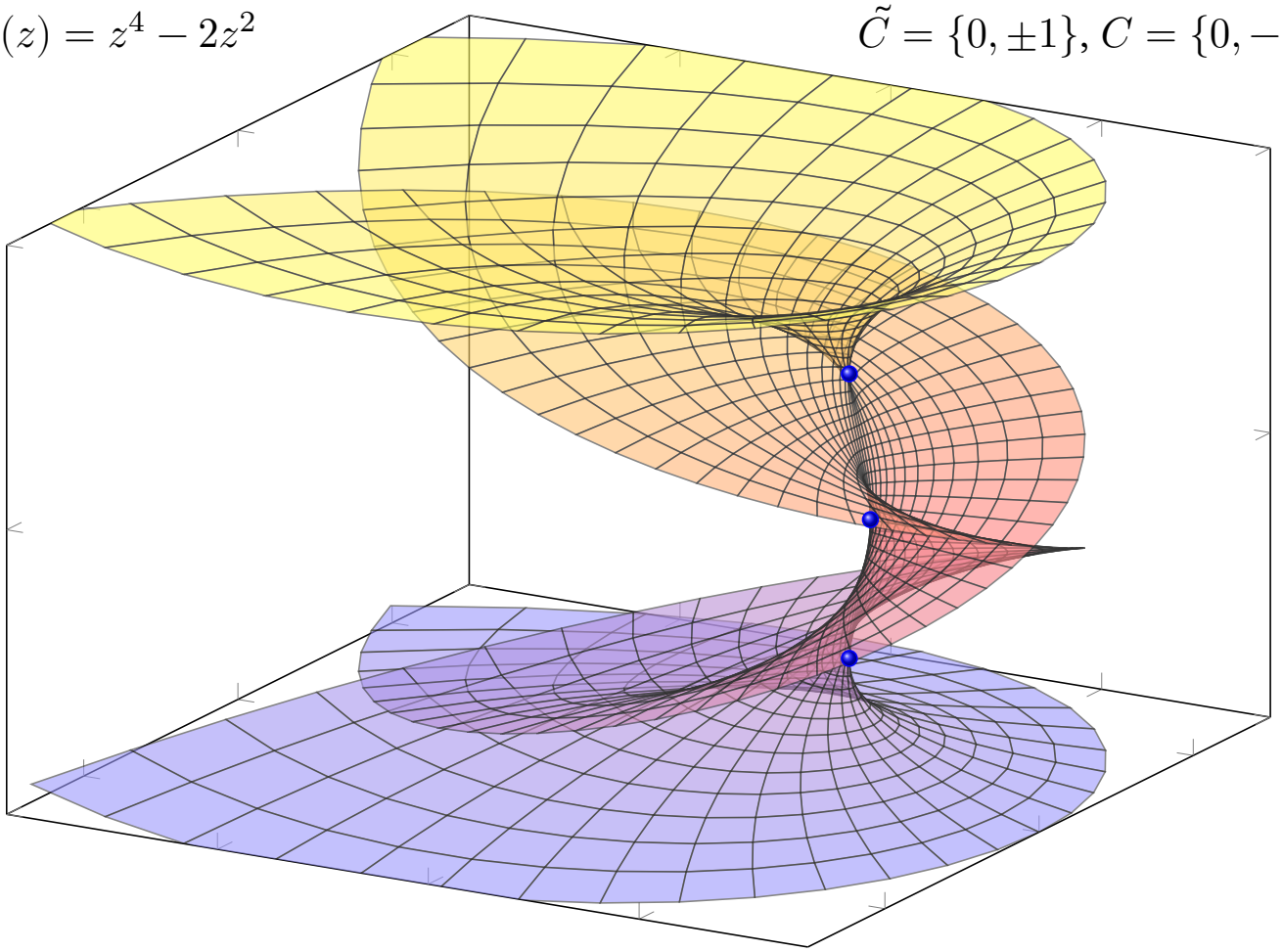


Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

M128
Erläuterung

$f(z) = z^4 - 2z^2$

$\tilde{C} = \{0, \pm 1\}, C = \{0, -1\}$



Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

Die obigen Graphiken zeigen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : w = u + \mathrm{i}v \mapsto z = x + \mathrm{i}y$ wie üblich als Projektion $(x, y, u) \leftarrow\!\shortmid (u, v, x, y)$ des Funktionsgraphen in $\mathbb{C}^2$.

Satz M1H: Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

Jede komplexe Polynomfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ von Grad $n \geq 1$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ist eine verzweigte Überlagerung.

Die Verzweigungspunkte sind die kritischen Werte $f(z)$ mit $f'(z) = 0$. Hier ist also $\tilde{C} := \{\, z \in \mathbb{C} \mid f'(z) = 0 \,\}$ endlich mit Bildmenge $C := f(\tilde{C})$.

Außerhalb dieser endlichen Menge ist f eine n–blättrige (unverzweigte) Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ nach $X = \mathbb{C} \setminus C$ von $\tilde{X} = p^{-1}(X) = \mathbb{C} \setminus p^{-1}(C)$.

Insbesondere beweist dies den Fundamentalsatz der Algebra.

Beweis: (1) Die Funktion f ist eigentlich (F5E), denn für $z \to \infty$ gilt $f(z) \to \infty$. In jedem $\mathscr{C}^1$–regulären Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{C}$, mit $f'(z) \neq 0$, ist f ein lokaler Homöomorphismus dank lokalem Umkehrsatz (C5Q).

Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

(2) Andernfalls, für $z \in \tilde{C}$ ist $w \mapsto f(z + w) = b_0 + b_k w^k + \cdots + b_n w^n$ topologisch äquivalent zur Potenzfunktion $w \mapsto w^k$ mit Exponent $k \geq 2$ und somit eine verzweigte Überlagerung (M1D). Diese kritischen Werte können wir ausschneiden und erhalten die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$.

Ausführlich: (3) Die Einschränkung $p = f^X_{\tilde{X}} : \mathbb{C} \supseteq \tilde{X} \to X \subseteq \mathbb{C}$ ist ein lokaler Homöomorphismus. Dank Satz M1F ist p lokal trivial.

(4) Die Blätterzahl von p ist konstant, denn X ist wegzusammenhängend. Sie ist ≥ 1. Hieraus folgt Surjektivität, also $p(\tilde{X}) = X$, somit $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(5) Demnach existiert eine Nullstelle $z_n \in \mathbb{C}$ mit $f(z_n) = 0$.
Durch wiederholte Polynomdivision folgt $f(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n)$.
Für jeden Wert $a \in \mathbb{C}$ gilt entsprechend $f(z) - a = (z - z_1^*) \cdots (z - z_n^*)$.
Somit hat die Faser $f^{-1}(a) = \{z_1^*, \ldots, z_n^*\}$ genau dann n Elemente, wenn $f'(z_k^*) \neq 0$ für alle k gilt, also a kein kritischer Wert ist.
Somit ist $p : \tilde{X} \to X$ eine n–blättige Überlagerung. QED

Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung

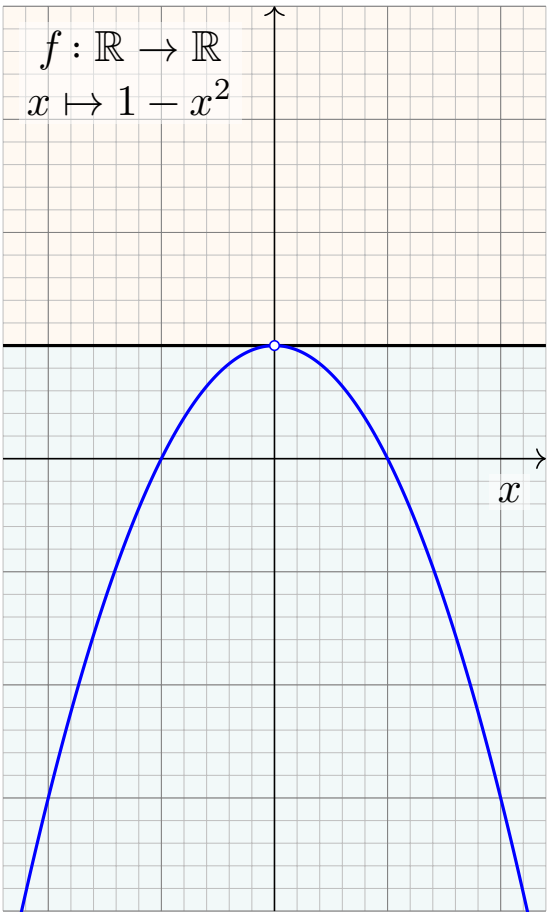
Aufgabe: Welche der obigen Argumente gelten noch über $\mathbb{R}$?

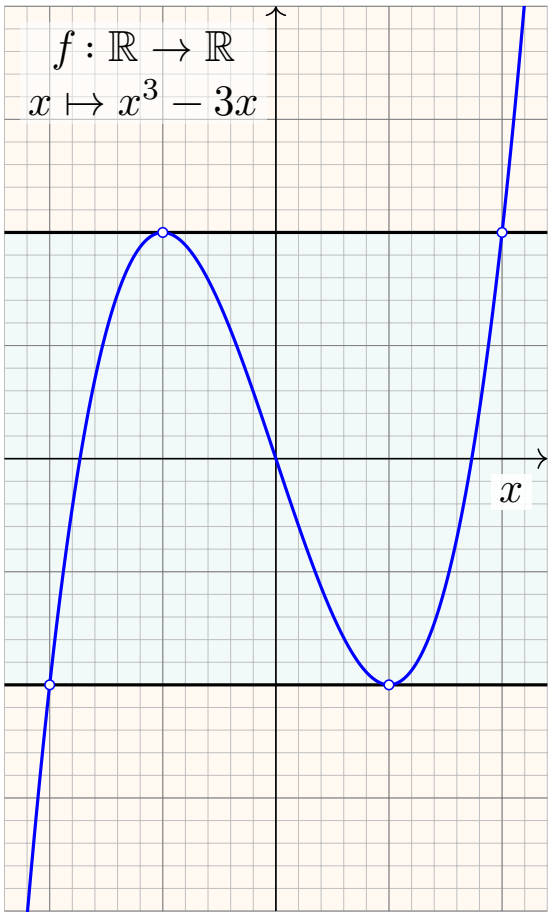
Lösung: Die Aussagen (1–3) gelten auch über $\mathbb{R}$: Für jedes reelle Polynom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten wir eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$. Allerdings gilt die Aussage (4) nicht mehr, denn $X = \mathbb{R} \setminus C$ ist i.A. nicht zusammenhängend. Tatsächlich ist die Blätterzahl von p im Allgemeinen nicht konstant.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - x^2$ gilt $f'(x) = -2x$, somit $\tilde{C} = \{0\}$ und $C = f(\tilde{C}) = \{1\}$ und $f^{-1}(C) = \{0\}$. Wir erhalten also die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ von $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ durch $\tilde{X} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Blätterzahl über $\mathbb{R}_{<1}$ ist 2, über $\mathbb{R}_{>1}$ hingegen 0. Insbesondere ist f nicht surjektiv.

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x$ gilt $f'(x) = 3x^2 - 3$, somit $\tilde{C} = \{\pm 1\}$ und $C = f(\tilde{C}) = \{\pm 2\}$ und $f^{-1}(C)) = \{\pm 1, \pm 2\}$. Wir erhalten also die Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ von $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ durch $\tilde{X} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2\}$. Die Blätterzahl über $]-2, 2[$ ist 3, aber nur 1 über $]-\infty, -2[$ und $]2, \infty[$.

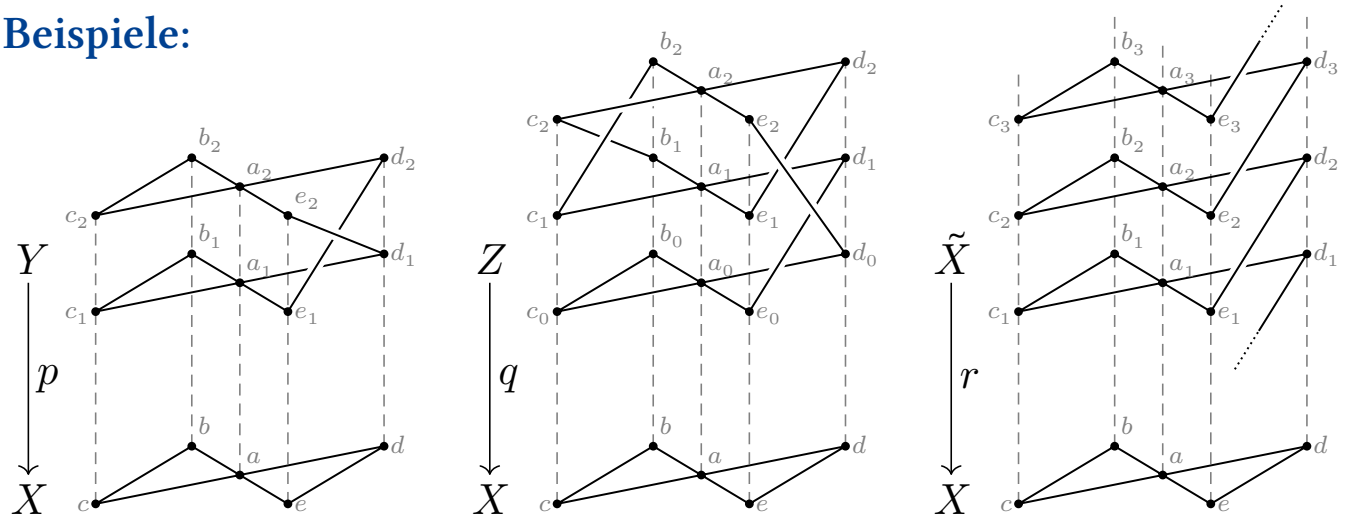
Polynomfunktion als un/verzweigte Überlagerung





Überlagerungen von Graphen

Beispiele:



Die Skizze zeigt drei Graphen X, Y, Z mit simplizialen Abbildungen $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$. Dies sind Überlagerungen, mit 2 bzw. 3 Blättern, denn jeder Eckenstern wird trivial überlagert (M1κ).

☺ Bei n–facher Überlagerung ver-n-facht sich die Euler–Charakteristik: Wir sehen hier $\chi(X) = -1$ und $\chi(Y) = 2\chi(X)$ und $\chi(Z) = 3\chi(X)$. Das dritte Beispiel $r : \tilde{X} \to X$ zeigt eine unendliche Überlagerung.

Überlagerungen von Graphen

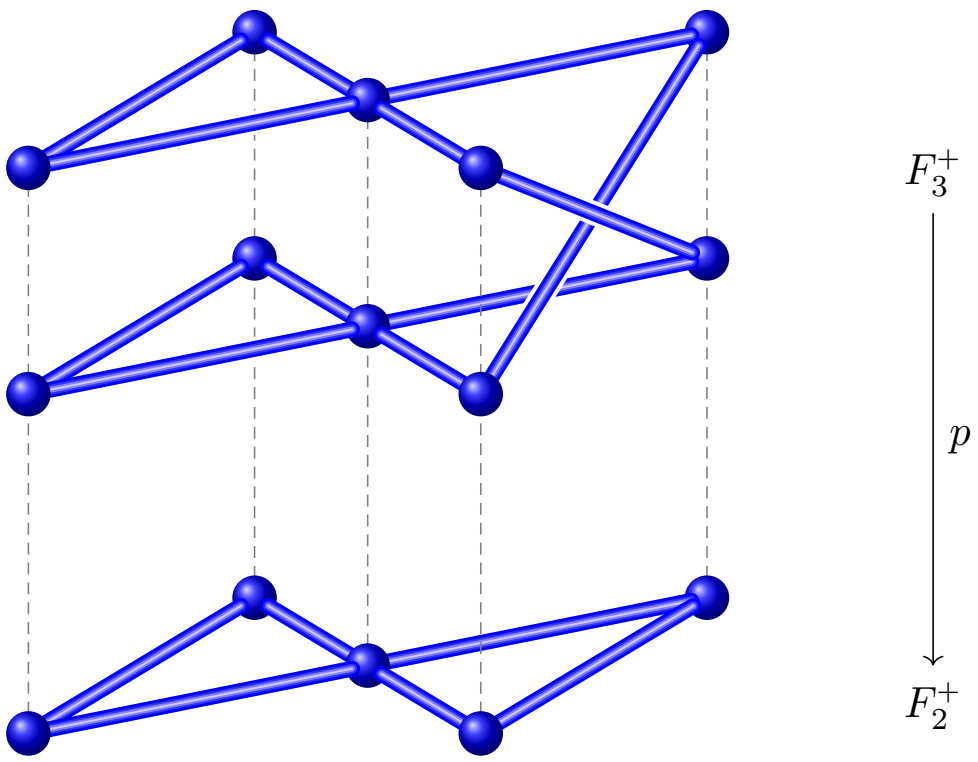
☺ Diese einfachen Beispiele enthalten bereits viele Beobachtungen, die sich im Folgenden entfalten und als wichtig erweisen werden. Es lohnt sich daher, diese Beispiele genau anzuschauen, in unser Repertoire aufzunehmen und immer wieder helfend heranzuziehen.

Zum Beispiel erweist sich $p : Y \to X$ als eine Galois–Überlagerung: Auf dem überlagernden Raum Y operiert die zweielementige Gruppe $\mathbb{Z}/2$ fasertreu durch Vertauschen der Indizes $1 \rightleftarrows 2$. Dies ist eine simpliziale Operation, und der Quotient ist äquivalent zu $p : Y \to X$.

Für die zweite Überlagerung $q : Z \to X$ hingegen gilt dies nicht. Auf Z können wir $\mathbb{Z}/3$ nicht fasertreu simplizial operieren lassen. Somit ist q ein kleinstes Beispiel einer „nicht normalen“ Überlagerung.

Bemerkung: Die Überlagerung ist hier die Einschränkung der Projektion $p : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, y)$, wirklich überschneidungsfrei gelingt es erst mit $\mathbb{R}^4 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2$. Sie können nun leicht explizite Koordinaten angeben. Abstrakte SKomplexe sind wie immer besonders bequem und effizient.

Überlagerungen geschlossener Flächen



Überlagerungen geschlossener Flächen

☺ Wir können jeden Graphen X etwas aufdicken, etwa eingebettet im $\mathbb{R}^3$ zu einer kleinen ε–Umgebung: Ecken werden zu Vollkugeln ($\cong \mathbb{D}^3$) und Kanten zu Vollzylindern ($\cong \mathbb{D}^2 \times [0,1]$). So erhalten wir zum Graphen X den Henkelkörper $N(X)$, wohldefiniert bis auf Homöomorphie.

Die obige Graphik zeigt genau dies, wenn wir im Graphen die Ecken und Kanten nicht als ideal dünn betrachten, sondern als realistisch dick.

Darin liegt $X \leftrightarrows N(X)$ als starker Deformationsretrakt, insbesondere haben beide dieselbe Euler–Charakteristik. Der Rand $A = \partial N(X)$ des Henkelkörpers ist eine geschlossene Fläche, $A \cong F_g^+$, mit doppelter Euler–Charakteristik, $\chi(A) = 2\chi(X)$. Die obige Skizze zu Graphen zeigt also zugleich interessante Überlagerungen geschlossener Flächen.

☺ Wichtige Überlagerungen von Flächen entstehen auf eine zweite Art. Wir erinnern uns an die Konstruktion der nicht-orientierbaren Flächen: Auch der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \twoheadrightarrow F_g^-$ ist eine simpliziale Überlagerung.

Simpliziale Überlagerungen

☺ Die obigen Beispiele zu Graphen und Flächen motivieren die folgende allgemeine Begriffsbildung zu simplizialen Überlagerungen:

Satz M1κ: simpliziale Überlagerung

Sei $p : L \to K$ eine simpliziale Abbildung. Zu jeder Ecke $y \in \Omega(L)$ über $x = p(y)$ haben wir den Eckenstern

$$\mathrm{St}(y, L) := \{\, T \in L \mid \{y\} \cup T \in L \,\}$$

und erhalten die Einschränkung $p_y : \mathrm{St}(y, L) \to \mathrm{St}(x, K)$. Wir nennen p eine **simpliziale Überlagerung**, fall p_y bijektiv ist für alle $y \in \Omega(L)$.

Dann ist die topologische Realisierung $|p| : |L| \to |K|$ eine Überlagerung. Hat p Blätterzahl n und ist K endlich, so auch L, und $\chi(L) = n \cdot \chi(K)$.

☹ Im Allgemeinen genügt lokale Homöomorphie nicht, wie Beispiel M1E lehrt. Im simplizialen Falle sind solche Pathologien ausgeschlossen. Diese Beobachtung wird im Folgenden zu einem nützlichen Werkzeug.

Simpliziale Überlagerungen

Beweis: (1) Zur Ecke $x \in \Omega(K)$ besteht $F_x = \{\, y \in \Omega(L) \mid p(y) = x \,\}$ aus allen Ecken über x. Für $y \neq y'$ in F_x gilt $\mathrm{St}(y, L) \cap \mathrm{St}(y', L) = \emptyset$. Andernfalls läge eine Ecke z im Schnitt, also $y, y' \in \mathrm{St}(z, K)$, und wegen $p(y) = p(y') = x$ wäre p auf diesem Stern nicht injektiv.

Somit wird der offene Eckenstern $\mathring{\mathrm{st}}(x, K) \subseteq |K|$ trivial überlagert durch die offenen Eckensterne $\bigsqcup_{y \in F_x} \mathring{\mathrm{st}}(y, L)$. Da dies für jede Ecke $x \in \Omega(K)$ gilt, ist $|p| : |L| \to |K|$ eine Überlagerung, da lokal-trivial über der offenen Überdeckung $|K| = \bigcup_{x \in \Omega(K)} \mathring{\mathrm{st}}(x, K)$.

(2) Über jedem Simplex $S \in K$ liegen genau n Simplizes $T \in L$, derselben Dimension: Über jeder Ecke $x \in S$ und zu jedem ihrer Urbilder $y \in p^{-1}(x)$ existiert dank Bijektivität von $p_y : \mathrm{St}(y, L) \to \mathrm{St}(x, K)$ genau ein Simplex $T \in L$ mit $y \in T$ und $p(T) = S$. Daraus folgt $\chi(L) = n \cdot \chi(K)$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Simplizial ist wie immer alles besonders schön und einfach.
Im endlichen Falle haben wir zudem die Euler–Charakteristik.

Simpliziale Immersionen und Submersionen

Übung: Sei K ein zusammenhängender Graph.
(1) Ist K ein Baum, also zykelfrei, so ist jede Überlagerung trivial. (M2M)
(2) Hat K mindestens einen Zykel, so existieren zusammenhängende Überlagerungen $p : L \to K$ mit beliebiger Blätterzahl $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.
(Erstellen Sie geeignete Skizzen, die Formalisierung ist dann leicht.)

Simpliziale Überlagerungen sind so einfach und so wirkunsgvoll, dass wir gerne noch genauer hinschauen und tiefer bohren wollen: Wir nennen $p : L \to K$ eine **simpliziale Immersion / Submersion**, falls zu jeder Ecke $y \in \Omega(L)$ die Abbildung $p_y : \mathrm{St}(y, L) \to \mathrm{St}(x, K)$ injektiv / surjektiv ist. (Gilt beides, so ist p eine Überlagerung.)

Übung: Sei $p : L \to K$ eine simpliziale Immersion / Submersion / Überlagerung. Jeder Kantenzug $w = v_0 v_1 \dots v_n$ in K erlaubt zu gegebenem Startwert $\tilde{v}_0 \in p^{-1}(v_0)$ höchstens / mindestens / genau eine Hochhebung $\tilde{w} = \tilde{v}_0 \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_n$ in L mit $p(\tilde{v}_k) = v_k$ für alle k.
(Hierzu ist Satz M4A das topologische Gegenstück.)

Simpliziale Immersionen und Submersionen

Übung: Ist $f : (L, y_0) \to (K, x_0)$ eine simpliziale Immersion von Graphen, so ist der induzierte Homomorphismus $\pi_1(f) : \pi_1(L, y_0) \to \pi_1(K, x_0)$ injektiv. (Hierzu ist Korollar M4B das topologische Gegenstück.)

📖 J.R. Stallings: *Topology of finite graphs.* Invent. Math. 71 (1983) 551–565

Zur Untersuchung freier Gruppen als Fundamentalgruppen von Graphen erweisen sich Immersionen als nützlich, wie John R. Stallings entdeckte und zu einer schönen Theorie ausbaute. Auf wundersam elegante Weise verbindet sie Graphen, Gruppen und Algorithmen. In seinen Worten:

I wanted to prove the standard theorems on free groups, and discovered that, after a few preliminaries, the notion of "locally injective map" (or "immersion") of graphs was very useful. This enables one to see, in an effective, easy, algorithmic way just what happens with finitely generated free groups. One can understand in this way Howson's theorem that if A and B are finitely generated subgroups of a free group, then $A \cap B$ is finitely generated.

Was ist eine Hochhebung?

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (W, w_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{C}^\times \end{tikzcd}$$

Seien $p : \tilde{X} \to X$ und $f : W \to X$ stetig. Eine **Hochhebung** $\tilde{f}$ von f bezüglich p ist eine stetige Abbildung $\tilde{f} : W \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

Entsprechend mit Fußpunkten, wie im obigen Diagramm: Gegeben sind $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ stetig. Eine **Hochhebung** $\tilde{f}$ von f ist eine stetige Abbildung $\tilde{f} : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

Beispiel M2A: Polarkoordinaten $p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ mit $p(r, \varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Jeden Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ wollen wir schreiben als $\gamma(t) = r(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$.

Gesucht ist also eine Hochhebung $(r, \varphi) : [0,1] \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. Hierzu ist der Startpunkt $\gamma(0) = r_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$ vorgegeben. Existieren Lösungen? genau eine? Für den Radius $r(t) = |\gamma(t)|$ ist das klar, für das Argument $\varphi(t)$ nicht!

Was ist eine Hochhebung?

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{C}, 0) \arrow[d, "\exp"] \\ ([0,1], 0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & (\mathbb{C}^\times, 1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\mathbb{C}^\times, 0) \arrow[d, "p_n"] \\ ([0,1], 0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & (\mathbb{C}^\times, 1) \end{tikzcd}$$

Beispiel M2B: Exponentialfuntion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ mit $z \mapsto \exp(z) = \mathrm{e}^z$. Jeden Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ wollen wir hochheben zu $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t)}$; dies löst „$\tilde{\gamma} = \ln \gamma$“, obwohl keine stetige komplexe Logarithmusfunktion existiert.

Beispiel M2C: Potenzfunktion $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times : w \mapsto w^n$ mit $n \geq 2$. Jeden Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ möchten wir darstellen als $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)^n$; dies löst „$\tilde{\gamma} = \sqrt[n]{\gamma}$“, obwohl keine stetige komplexe Wurzelfunktion existiert.

☺ Das erinnert uns stark an gewöhnliche Differentialgleichungen. Gegeben ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir wollen $y'(t) = f(y(t))$ lösen: Zu jedem Anfangswert $y(0) = x_0$ suchen wir Lösungen $y : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$.

Das führt uns zur zentralen Frage nach Existenz und Eindeutigkeit!

Hochhebung: Existenz und Eindeutigkeit

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R},0) \arrow[d, "p:t\mapsto e^{2\pi i t}"] \\ (\mathbb{S}^0,1) \arrow[ur, dashed, "\tilde f_k\,(k\in\mathbb{Z})", "-1\mapsto 1/2+k"'] \arrow[r, "f=\mathrm{inc}"] & (\mathbb{S}^1,1) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\mathbb{R},0) \arrow[d, "p:t\mapsto e^{2\pi i t}"] \\ (\mathbb{S}^1,1) \arrow[ur, dashed, "\nexists \tilde f"] \arrow[r, "f=\mathrm{id}", "\not\simeq *"'] & (\mathbb{S}^1,1) \end{tikzcd}$$

Beispiel M2D: Weder Eindeutigkeit noch Existenz sind automatisch!

Die Inklusion $f : (\mathbb{S}^0, 1) \hookrightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ erlaubt mehrere Hochhebungen: Zwar ist $\tilde f(1) = 0$ festgelegt, aber $\tilde f(-1) \in 1/2 + \mathbb{Z}$ ist frei wählbar.

Die Identität $\mathrm{id} : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ ist nicht nullhomotop (J4A) und erlaubt daher keine Hochhebung bezüglich $p : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto e^{2\pi i t}$.

Jede stetige Abbildung $\tilde f : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{R}, 0)$ ist zusammenziehbar relativ 1 vermöge der affinen Homotopie $\tilde H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ mit $\tilde H(t,x) = t\tilde f(x)$. Gälte $p \circ \tilde f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, so wäre auch $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ zusammenziehbar vermöge $H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $H = p \circ \tilde H$. Das widerspricht J4A.

Eindeutigkeit der Hochhebung

$$\begin{tikzcd} & \tilde X \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[ur, "g,h"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\tilde X, \tilde x_0) \arrow[d, "p"] \\ (W, w_0) \arrow[ur, dashed, "\exists^{\le 1} \tilde f"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Proposition M2E: Eindeutigkeit der Hochhebung

Sei $p : \tilde X \to X$ eine Überlagerung, $f : W \to X$ und $g, h : W \to \tilde X$ stetig mit $f = p \circ g = p \circ h$. Wir zerlegen $W = A \sqcup B$ in die beiden Mengen

$$A := \{\, w \in W \mid g(w) = h(w) \,\},$$
$$B := \{\, w \in W \mid g(w) \neq h(w) \,\}.$$

Beide sind offen! Ist W zusammenhängend, so gilt $A = W$ oder $B = W$:

- Gilt $g(w) = h(w)$ für ein $w \in W$, so folgt $g(w) = h(w)$ für alle $w \in W$.
- Gilt $g(w) \neq h(w)$ für ein $w \in W$, so folgt $g(w) \neq h(w)$ für alle $w \in W$.

Eindeutigkeit der Hochhebung

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[ur, "g,h"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\tilde{U}_k, \tilde{x}_k) \\ & (\tilde{U}_j, \tilde{x}_j) \arrow[d, "p_i", "\cong"'] \\ (V, w) \arrow[ur, "h"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[r, "f"] & (U, x) \end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $w \in W$. Zum Bild $x := f(w)$ existiert eine trivial überlagerte offene Umgebung $U \subseteq X$; es existiert eine Zerlegung $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i$ in offene Mengen $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{X}_i$, und p stiftet Homöomorphismen $p_i : \tilde{U}_i \xrightarrow{\sim} U$.

Wegen $f(w) = p \circ g(w) = p \circ h(w)$ existieren $j, k \in I$ mit $g(w) =: \tilde{x}_j \in \tilde{U}_j$ und $h(w) := \tilde{x}_k \in \tilde{U}_k$. Dazu ist $V = g^{-1}(\tilde{U}_j) \cap h^{-1}(\tilde{U}_k) \ni w$ eine offene Umgebung. Nach Konstruktion gilt $g|_V = p_j^{-1} \circ f|_V$ und $h|_V = p_k^{-1} \circ f|_V$.

Aus $w \in A$ folgt $j = k$ und somit $g|_V = h|_V$, also $V \subseteq A$. Aus $w \in B$ folgt $j \neq k$ und somit sind $g(V) \subseteq \tilde{U}_j$ und $h(V) \subseteq \tilde{U}_k$ disjunkt, also gilt $V \subseteq B$. Somit sind A und B offen in W. $\boxed{\text{QED}}$

Eindeutigkeit der Hochhebung

Durch Angabe eines Basispunktes erhalten wir Eindeutigkeit:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (W, w_0) \arrow[ur, dashed, "g,h"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ ([0,1], 0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & (\mathbb{S}^1, x_0) \end{tikzcd}$$

Korollar M2F: Eindeutigkeit möglicher Hochhebungen

Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f : (W, w_0) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung. Ist der Raum W zusammenhängend, so existiert zu f höchstens eine Hochhebung: Sind $g, h : (W, w_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ stetig und erfüllen beide $p \circ g = p \circ h = f$, so gilt $g = h$ dank M2E. $\boxed{\text{QED}}$

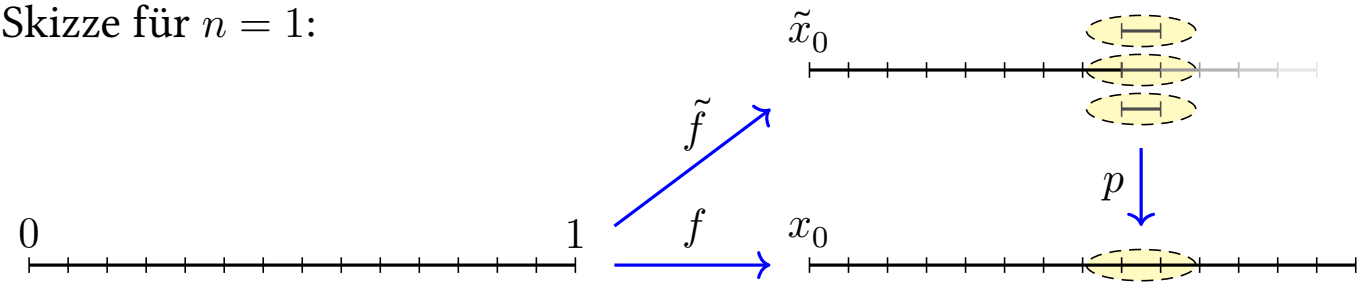
Beispiel: Wir betrachten die Überlagerung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times : z \mapsto \mathrm{e}^z$. Jeder Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^\times : t \mapsto \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}(t)}$ erlaubt genau die Hochhebungen $\tilde{\gamma}_k : [0,1] \to \mathbb{C} : t \mapsto \tilde{\gamma}(t) + 2\pi \mathrm{i} k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Ist $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine beliebige Hochhebung, so gilt $\hat{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}_k(0)$ für genau ein $k \in \mathbb{Z}$, und somit $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}_k$.

Hochhebung von Wegen und Homotopien

Satz M2G: Hochhebung von Wegen und Homotopien

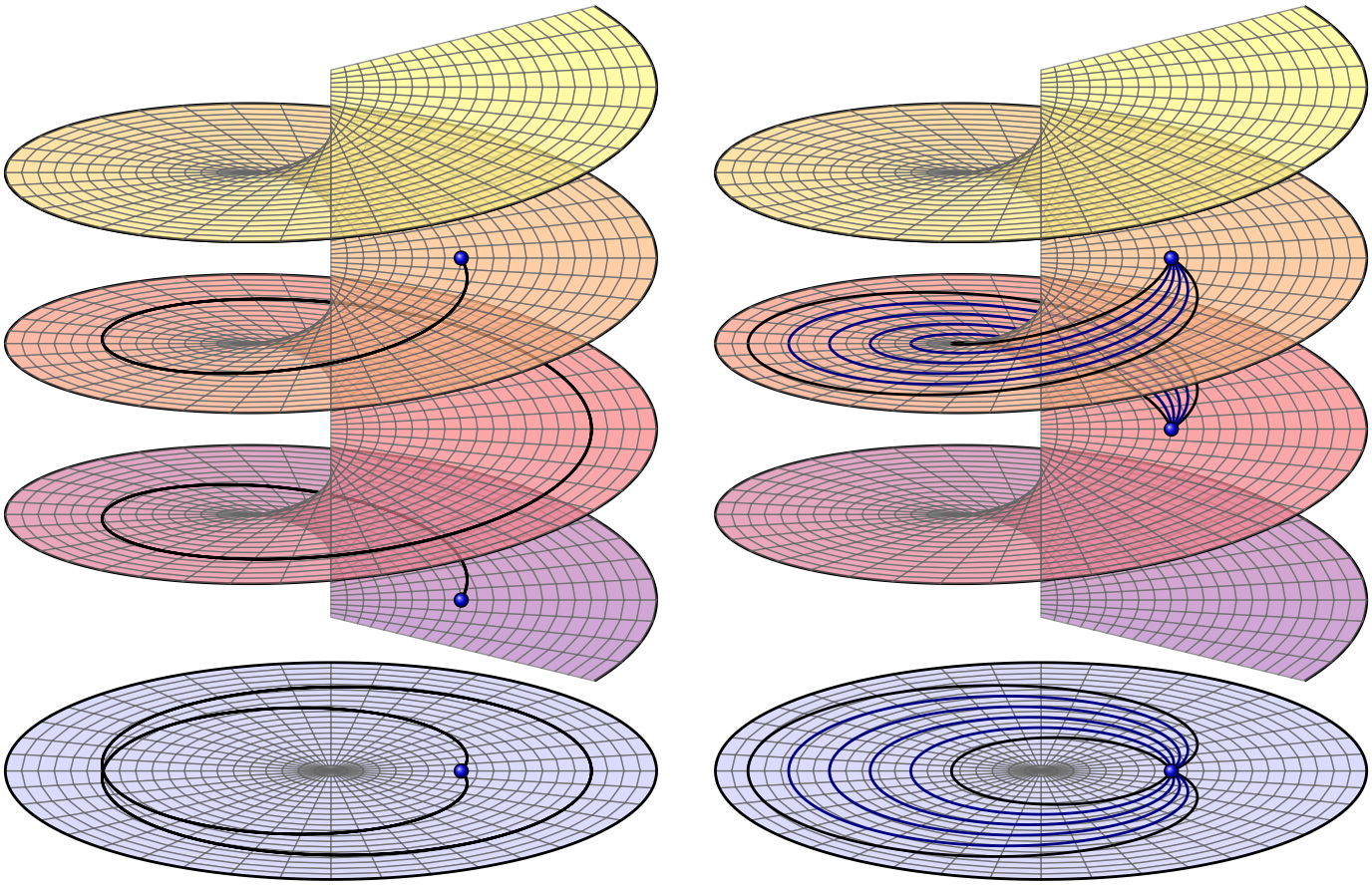
Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Zu jeder stetigen Abbildung $f : ([0,1]^n, 0) \to (X, x_0)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{f}$ bezüglich p, also eine stetige Abbildung $\tilde{f} : ([0,1]^n, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

Skizze für $n = 1$:

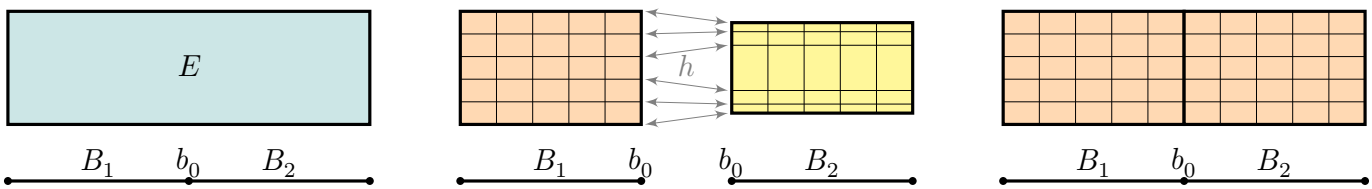


Hochhebung von Wegen ist plausibel, simplizial ist sie klar (M139).
Doch schon für Homotopien ($n = 2$) verlässt uns die Anschauung...
Wir brauchen einen Beweis! Ich führe die Konstruktion für Bündel aus; das ist abstrakter, also allgemeiner und damit vielseitiger anwendbar.
Überlagerungen sind die lokal-trivialen Bündel mit diskreter Faser.

Hochhebung von Wegen und Homotopien



Verkleben von Trivialisierungen



Satz M2J:

(1) Sei $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \{b_0\}$ und $B_1, B_2 \subseteq B$ abgeschlossen. Ist $p : E \to B$ trivialisierbar über B_1 und über B_2, so auch über B.

Beweis: Zu $p_i = p|B_i : E_i \to B_i$ sei $\tau_i : B_i \times F_i \xrightarrow{\sim} E_i$ eine Trivialisierung.

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "\cong", "u \mapsto \tau_1(b_0,u)"'] \arrow[d, dashed, "\cong"', "h := \tau_2(b_0,-)^{-1} \circ \tau_1(b_0,-)"] & p^{-1}(b_0) \arrow[d, equal] \\
F_2 \arrow[r, "\cong", "u \mapsto \tau_2(b_0,u)"'] & p^{-1}(b_0)
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2 \times F_1 \xrightarrow{\sim} E_2$ mit $\tau_2' = \tau_1$ auf $\{b_0\} \times F_1$. Ihre Verklebung $\tau = \tau_1 \cup \tau_2' : B \times F_1 \xrightarrow{\sim} E$ trivialisiert p. QED

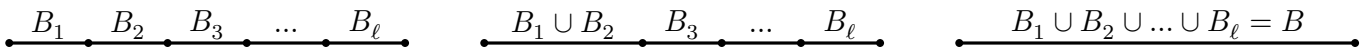
Lokal-trivial über $[0,1]$ ist trivial.

Genauer sei $(\tau_i, \sigma_i) : B_i \times F_i \cong E_i$ eine Trivialisierung von p_i für $i = 1, 2$. Durch die obige Umparametrisierung $(h, k) : F_1 \cong F_2$ erhalten wir daraus $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2 \times F_1 \to E_2$ und $\sigma_2' = (\mathrm{id}_B \times k) \circ \sigma_2 : E_2 \to B_2 \times F_1$ mit $(\tau_2', \sigma_2') : B_2 \times F_1 \cong E_2$ und zudem $(\tau_2', \sigma_2') = (\tau_1, \sigma_1)$ auf $\{b_0\} \times F_1$. Ihre Verklebung $(\tau, \sigma) : B \times F_1 \xrightarrow{\sim} E$ trivialisiert p.

Satz M2J:

(2) Jedes lokal-trivialisierbare Bündel $p : E \to [0,1]$ ist trivial.

Beweis: Zu p existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $B = [0,1]$, sodass $p|U_i$ trivial ist über jedem $U_i \subseteq B$. Wir unterteilen B in $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gleichlange Teile $B_i = [(i-1)/\ell, i/\ell]$ für $i = 1, \dots, \ell$. Ist ℓ groß genug, so ist $p|B_i$ trivial über jedem B_i. Warum? Dank Lebesgue–Zahl! (F2B)



Dank (1) ist p trivial über $B_1 \cup \dots \cup B_i$ für $i = 1, \dots, \ell$, also über B. QED

Verkleben von Trivialisierungen

Satz M2J:

(3) Sei $B = B_1 \cup B_2$ mit $B_1 \cap B_2 = \{b_0\}$ und $B_1, B_2 \subseteq B$ abgeschlossen. Ist $p : E \to B \times C$ trivial über $B_1 \times C$ und $B_2 \times C$, so auch über $B \times C$.

Aufgabe: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Konstruktion (1).

Beweis: Zu $B_i^* = B_i \times C$ und $p_i = p|B_i^*$ sei $(\tau_i, \sigma_i) : B_i^* \times F_i \cong E_i$ eine Trivialisierung. Über $B_0^* = \{b_0\} \times C$ wird auf zwei Arten trivialisiert:

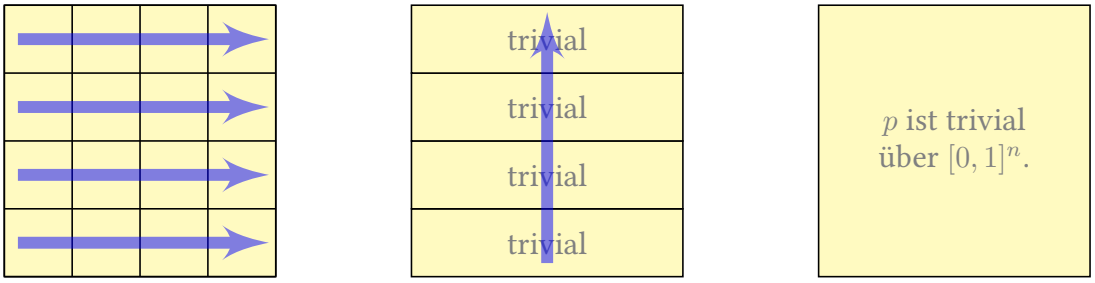
$$\begin{tikzcd}
C \times F_1 \arrow[r, "\cong", "(c,u)\mapsto\tau_1(b_0,c,u)"'] \arrow[d, dashed, "\cong"', "h:=\tau_2(b_0,-)^{-1}\circ\tau_1(b_0,-)"] & p^{-1}(\{b_0\} \times C) \arrow[d, equal] \\
C \times F_2 \arrow[r, "\cong", "(c,u)\mapsto\tau_2(b_0,c,u)"'] & p^{-1}(\{b_0\} \times C)
\end{tikzcd}$$

Durch die obige Umparametrisierung $(h, k) : F_1 \cong F_2$ erhalten wir daraus $\tau_2' = \tau_2 \circ (\mathrm{id}_B \times h) : B_2^* \times F_1 \to E_2$ und $\sigma_2' = (\mathrm{id}_B \times k) \circ \sigma_2 : E_2 \to B_2^* \times F_1$ mit $(\tau_2', \sigma_2') : B_2^* \times F_1 \cong E_2$ und zudem $(\tau_2', \sigma_2') = (\tau_1, \sigma_1)$ auf $B_0^* \times F_1$. Ihre Verklebung $(\tau, \sigma) : B^* \times F_1 \rightsquigarrow E$ trivialisiert p. QED

Lokal-trivial über $[0,1]^n$ ist trivial.

Satz M2J:

(4) Jedes lokal-trivialisierbare Bündel $p : E \to [0,1]^n$ ist trivial.



Aufgabe: Beweisen Sie dies nach dem Vorbild von Konstruktion (2).

Beweis: Zu p existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $B = [0,1]^n$, sodass $p|U_i$ trivial ist über jedem $U_i \subseteq B$. Wir unterteilen B in $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ Würfel $B_i = \prod_{k=1}^n [(i_k - 1)/\ell, i_k/\ell]$ für $i \in \{1, \dots, \ell\}^n$. Ist ℓ groß genug, so ist $p|B_i$ trivial über jedem B_i. Warum? Dank Lebesgue–Zahl! (F2B) Dank (3) ist p trivial über B, nach obigen Verklebeschema. QED

Übung: Die Skizze zeigt $n = 2$. Führen Sie die Induktion über n aus.

Zurückziehen eines Bündels

$$\begin{tikzcd} ? & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f=\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "p'=\mathrm{pr}_1"] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (b',e) \arrow[r, mapsto, "f=\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, mapsto, "p'=\mathrm{pr}_1"] & e \arrow[d, mapsto, "p"] \\ b' \arrow[r, mapsto, "g"] & b \end{tikzcd}$$

Sei $p : E \to B$ ein Bündel $g : B' \to B$ eine beliebige stetige Abbildung. Ihr **Faserprodukt** $E' = B' \,{}_g\!\times_p E := \{\,(b',e) \in B' \times E \,|\, g(b') = p(e)\,\}$ definiert das **zurückgezogene Bündel** $g^*p := p' : E' \to B' : (b',e) \mapsto b'$ und den Bündelmorphismus $(f,g) : p' \to p$ mit $f : E' \to E : (b',e) \mapsto e$.

Satz M2κ:

Ist $p : E \to B$ lokal-/trivial, so auch jede Zurückziehung $g^*p : E' \to B'$.

Beweis: (1) Sei $(\tau,\sigma) : B \times F \cong E : (b,u) \leftrightarrows e$ eine Trivialisierung von p. Wir erhalten die Trivialisierung $(\tau',\sigma') : B' \times F \cong E' : (b',u) \leftrightarrows (b',e)$ von p' durch $\tau'(b',u) = (b',\tau(g(b'),u))$ und $\sigma'(b',e) = (b',\mathrm{pr}_2\sigma(e))$.

(2) Ist p trivial über $U \subseteq B$, so ist p' trivial über $U' = g^{-1}(U) \subseteq B'$. $\boxed{\text{QED}}$

Zurückziehen eines Bündels

☺ Aus den gegebenen Daten lässt sich nur eine sinnvolle Trivialisierung bauen. Unser erster und einziger Versuch gelingt tatsächlich!

Aufgabe: Prüfen Sie die behaupteten Eigenschaften nach!

Lösung: (1) Zunächst die globale Trivialisierung $(\tau',\sigma') : B' \times F \cong E'$: Ist $\tau' : B' \times F \to E'$ wohldefiniert? Ja, denn $p(e) = p(\tau(g(b'),u)) = g(b')$. Die Stetigkeit von τ',σ' ist klar, ebenso $p' \circ \tau' = \mathrm{pr}_1$ und $\mathrm{pr}_1 \circ \sigma' = p'$.

$$\sigma' \circ \tau' : (b',u) \mapsto (b', e = \tau(g(b'),u)) \mapsto (b', \mathrm{pr}_2\sigma(e)) = (b',u),$$

$$\begin{aligned} \tau' \circ \sigma' : (b',e) &\mapsto (b', u = \mathrm{pr}_2\sigma(e)) \mapsto (b', \tau(g(b'),u)) \\ &= (b', \tau(p(e), \mathrm{pr}_2\sigma(e))) = (b', \tau(\sigma(e))) = (b',e). \end{aligned}$$

Somit ist (τ',σ') ein Bündelisomorphismus $B' \times F \cong E'$, wie behauptet.

(2) Über $U \subseteq B$ haben wir das eingeschränkte Bündel $p|U : E_U \to U$ mit $E_U := p^{-1}(U) \subseteq E$. Über $U' = g^{-1}(U) \subseteq B'$ haben wir $p'|U' : E'_{U'} \to U'$ mit Totalraum $E'_{U'} = p'^{-1}(U') = \{\,(b',e) \in U' \times E \,|\, g(b') = p(e)\,\} \subseteq E'$. Ist $p|U$ trivial, so auch $p'|U'$ dank (1). $\boxed{\text{QED}}$

Anwendung: Hochhebung von Wegen und Homotopien

Satz M2L: Hochhebung von Wegen und Homotopien

Sei $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ eine lokal-triviales Bündel. Zu jeder stetigen Abbildung $g : ([0,1]^n, 0) \to (B, b_0)$ existiert eine Hochhebung $\tilde{g}$ über p, also eine stetige Abbildung $\tilde{g} : ([0,1]^n, 0) \to (E, e_0)$ mit $p \circ \tilde{g} = g$.

☺ Dank unserer Vorbereitungen ist dies nun trivialilisert:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]^n \times F} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_1"] & E' \arrow[r, "f=\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "p'=\mathrm{pr}_1"] & E \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, equal] \arrow[u, dashed, bend left] & {[0,1]^n} \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Beweis: Das zurückgezogene Bündel $p' = g^*p : E' \to [0,1]^n$ ist lokal-trivial dank M2K, somit trivial dank M2J: Es existiert eine Trivialisierung $\tau : [0,1]^n \times F \xrightarrow{\sim} E'$ mit $(0, u_0) \mapsto (0, e_0)$. Die Abbildung $\tilde{g} : [0,1]^n \to E$ mit $\tilde{g}(x) = \mathrm{pr}_2 \tau(x, u_0)$ ist stetig, erfüllt $\tilde{g}(0) = e_0$ und $p \circ \tilde{g}(x) = p \circ \mathrm{pr}_2 \tau(x, u_0) = g(x)$. QED

Anwendung: Hochhebung von Wegen und Homotopien

Daraus folgt insbesondere der obige Satz M2G als schöner Spezialfall: Sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung. Zu jeder stetigen Abbildung $f : ([0,1]^n, 0) \to (X, x_0)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{f}$ bezüglich p, also eine stetige Abbildung $\tilde{f} : ([0,1]^n, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

Wie bei vielen Problemen lohnt es sich auch hier, Existenz und Eindeutigkeit separat zu behandeln.

☺ Die Existenz gilt für jedes lokal-triviale Bündel, dank Satz M2L. Dieser allgemeine Fall ist lehrreich, kostet uns keine zusätzliche Mühe und liefert eine nützliche Eigenschaft, die wir weiter nutzen können.

☺ Die Eindeutigkeit ist eine besondere Eigenschaft von Überlagerungen, gemäß M2E: Da die Faser diskret ist, hat eine weitere Hochhebung keine Möglichkeit abzuweichen. Genau dies zeigt unser obiger Beweis.

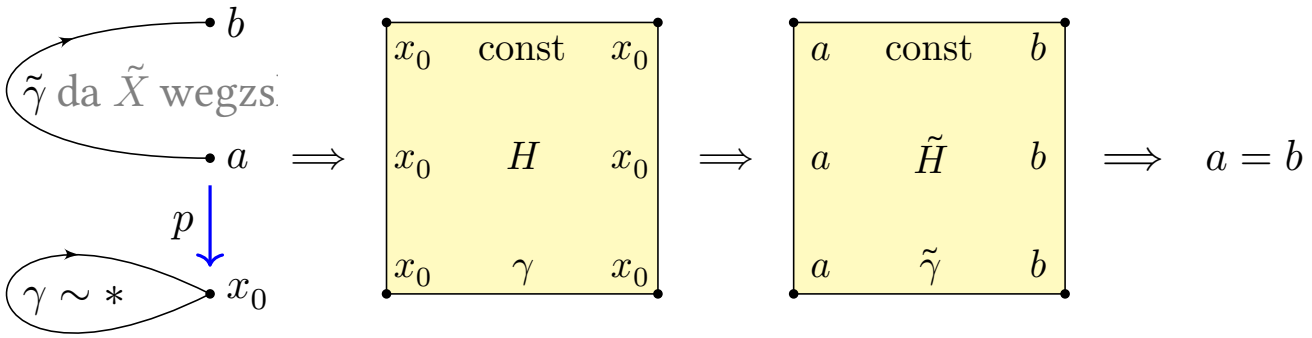
Anwendung: triviale Überlagerung

Korollar M2M: triviale Überlagerung

(1) Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend und X einfach zusammenhängend, so ist p ein Homöomorphismus.

(2) Ist X lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend, so ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ trivial.

Beweis: (1) Nach Definition M1A ist p surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus. Es genügt zu zeigen, dass p injektiv ist.



(2) Dank (1) ist $p : \tilde{X} = \bigsqcup \pi_0(\tilde{X}) \to X$ eine triviale Überlagerung. QED

Anwendung: triviale Überlagerung

Aufgabe: Führen Sie die obige Beweisskizze sorgsam aus.

Lösung: (1) Seien $a, b \in \tilde{X}$ zwei Punkte mit gleichem Bild $x_0 \in X$. Da $\tilde{X}$ wegzshgd ist, existiert ein Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{X}$ von $\tilde{\gamma}(0) = a$ nach $\tilde{\gamma}(1) = b$. Sein Bild $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ ist somit eine Schleife in (X, x_0).

Da X einfach zshgd ist, existiert eine Homotopie $H : \gamma \simeq \text{const rel } \{0,1\}$, also eine stetige Abbildung $H : [0,1]^2 \to X$ mit den Randbedingungen $H(0,t) = \gamma(t)$ und $H(0,t) = H(s,0) = H(s,1) = x_0$ für alle $s, t \in [0,1]$.

Dank M2G existiert eine Hochhebung zu einer stetigen Abbildung $\tilde{H} : [0,1]^2 \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und dem Startpunkt $\tilde{H}(0,0) = a$. Dank Eindeutigkeit der Hochhebung (M2F) erhalten wir für die vier Randwege das obige Bild: Hieraus folgt $a = b$. Somit ist p injektiv.

(2) Mit X ist auch $\tilde{X}$ lokal wegzusammenhängend (M1N). Daher zerfällt $\tilde{X} = \bigsqcup \pi_0(\tilde{X})$ in die topologische Summe seiner Wegkomponenten (G3C). Für $\tilde{X}_i \in \pi_0(X)$ erhalten wir durch Einschränkung $p_i : \tilde{X}_i \to X$ eine Überlagerung (M1L). Dank (1) ist p_i ein Homöomorphismus. QED

Anwendung: triviale Überlagerung

Beispiel: Jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to [0,1]^n$ ist trivial. Diese Aussage benötigen wir im Beweis, und sie ist als Spezialfall im Satz enthalten.

Die Hochhebung von Wegen und Homotopien stiftet den grundlegenden Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ und allen Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$. Bevor wir dies zur allgemeinen Theorie und schließlich zur Galois–Korrespondenz ausbauen, möchte ich schon jetzt Korollar M2M als erste direkte Folgerung betonen.

Beispiel: Für $n \geq 2$ ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to \mathbb{S}^n$ trivial.
Ebenso ist jede Überlagrung $p : \tilde{X} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ trivial.

Für $n = 1$ hingegen gibt es nicht-triviale Überlagerungen $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ und $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, zum Beispiel $p(z) = z^k$ mit $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Diese einfache Beobachtung hat erstaunliche algebraische Konsequenzen, wie der Satz von Gelfand–Mazur (M2O) und der Satz von Hopf (M2Q).

Anwendung: triviale Überlagerung

🙂 Jeder Raum X erlaubt selbstverständlich triviale Überlagerungen $p : X \times F \to F : (x, u) \mapsto x$ mit jeder beliebigen diskreten Faser $F \neq \emptyset$. Manche Räume erlauben *ausschließlich* triviale Überlagerungen, etwa alle Würfel $[0,1]^n$ oder die Sphären $\mathbb{S}^n$ für $n \geq 2$ oder allgemein jeder Raum, der lokal wegzshgd und einfach zshgd ist

⚠ Der lokale Wegzusammenhang ist in (2) wirklich notwendig!
Der Pseudokreis $W \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend, erlaubt aber dennoch nicht-triviale Überlagerungen.

Der Satz von Gelfand–Mazur

Erinnerung: Die Exponentialfunktion $\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ ist ein Gruppenisomorphismus und ein Diffeomorphismus. Hingegen ist $\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$ ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$, lokaler Diffeomorphismus und einfach zshgde Überlagerung.

Allgemein: Sei $(A, \cdot, 1)$ eine $\mathbb{R}$–Banach–Algebra mit Eins und

$$\exp : A \to A : \exp(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!.$$

Für $x, y \in A$ mit $xy = yx$ gilt $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, insbesondere $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$. Somit ist $\exp(x)$ in A invertierbar und $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$. Damit ist $\exp : (A, 0) \to (A^\times, 1)$ ein lokaler Diffeomorphismus um 0. Als lokale Umkehrung haben wir

$$\ln : B(1, 1) \to A : \ln(1 + x) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k/k$$

Es gilt $\exp'(x) = \exp(x)$ und $\ln'(a) = a^{-1}$. Für alle $x \in B(0, 1)$ folgt daraus $f(x) := \exp(\ln(1 + x)) = 1 + x$, denn wir finden $f(0) = 1$ und $f'(x) = \exp(\ln(1 + x))(1 + x)^{-1}$, also $f'(0) = 1$ und $f''(x) = 0$.

Der Satz von Gelfand–Mazur

Für jede *kommutative* Banach–Algebra ist die Situation besonders schön, so wie $\exp : (\mathbb{R}, +, 0) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1)$ und $\exp : (\mathbb{C}, +, 0) \twoheadrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot, 1)$:

Satz M2N:

Für jede kommutative Banach–Algebra $(A, +, 0, \cdot, 1)$ gilt:

1. Die Exponentialfunktion $\exp : (A, +, 0) \to (A^\times, \cdot, 1)$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit diskretem Kern.
2. Die Bildmenge ist $\exp(A) = A_1^\times := [1]_{A^\times}$, die Komponente der Eins, und hierüber ist $\exp : (A, 0) \to (A_1^\times, 1)$ eine Überlagerung.

Beweis: (1) Dies haben wir eben nachgerechnet dank $\ln$. (2) Der Raum A ist zusammenhängend, also auch das stetige Bild $\exp(A)$ in $A^\times$. In $A_1^\times$ ist $\exp(A)$ eine offene Untergruppe von $A_1^\times$, somit auch abgeschlossen, also $\exp(A) = A_1^\times$. (3) Wir haben $\exp_a(x) := \exp(a + x) = \exp(a)\exp(x)$ mit Umkehrung $\ln_a(x) := a + \ln(\exp(-a) \cdot x)$ für $x \in B(\exp(a), |\exp(a)|)$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Aus diesen analytischen Eigenschaften der Exponentialfunktion gewinnen wir nun eine bemerkenswerte algebraische Folgerung…

Der Satz von Gelfand–Mazur

Wir kennen die Banach–Algebren $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbb{C}^{n\times n}$. Erstere sind sogar Körper, Letztere offensichtlich nicht. Klassifikation:

Satz M2o: Gelfand–Mazur

Ist eine Banach–Algebra A ein Körper, so ist $\dim_{\mathbb{R}}(A) \geq 3$ unmöglich. Es bleibt nur $\dim_{\mathbb{R}}(A) \in \{1, 2\}$, folglich ist A isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Beweis: Angenommen, es gälte $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$. Die Gruppe $A^\times = A \setminus \{0\}$ ist dann einfach zusammenhängend (L2U). Die Exponentialabbildung $\exp : (A, +, 0) \to (A^\times, \cdot, 1)$ ist eine Überlagerung (M2N), daher trivial (M2M), also ein Homöomorphismus und ein Gruppenisomorphismus.

In der Gruppe $(A^\times, \cdot, 1)$ hat das Element -1 die Ordnung 2. Hingegen hat $(A, +, 0)$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum außer 0 keine Elemente endlicher Ordnung. An diesem Widerspruch zerbricht unsere Annahme $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$. $\boxed{\text{QED}}$

Bemerkung: Über $\mathbb{R}$ liegt -1 gar nicht erst im Bild von $\exp : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0}$. Über $\mathbb{C}$ gilt $\exp : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}^\times$ mit $\exp(\pi\mathrm{i}) = -1$ und $\pi\mathrm{i} + \pi\mathrm{i} \in \operatorname{Ker}(\exp)$. Ein Widerspruch entsteht erst für $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 3$, wie gezeigt.

Der Satz von Gelfand–Mazur

Aufgabe: Das beweist erneut den Fundamentalsatz der Algebra (FTA); der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen!

Lösung: Angenommen, es gäbe ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $\deg P \geq 2$ ohne Nullstellen in $\mathbb{C}$. Nach Primzerlegung können wir P zudem als irreduzibel annehmen. Dann wäre der Quotientenring $A = \mathbb{C}[X]/(P)$ ein Körper mit $\dim_{\mathbb{C}} A = \deg P \geq 2$, also $\dim_{\mathbb{R}} A \geq 4$. Dank endlicher Dimension ist A automatisch eine Banach–Algebra. Das widerspricht dem Satz M2o von Gelfand–Mazur.

🙂 Die Voraussetzung ist analytisch, die Schlussfolgerung algebraisch, der Beweis topologisch. Verschiedene Aspekte der Mathematik arbeiten hier wunderbar harmonisch zusammen zu einem erfolgreichen Ganzen.

Als Dreingabe erhalten wir erneut einen verblüffenden Beweis des FTA. Das war zwar anfangs gar nicht unser Ziel, ist aber immer wieder schön.

Es ist schon kurios: Wir nutzen den FTA seit Anbeginn des Studiums, doch leider ist ein Beweis anfangs noch außer Reichweite. Später scheint jeder Satz, der etwas auf sich hält, den FTA als Korollar mitzubringen.

Gruppenoperation und Quotient

Beispiel: Die Gruppe $\{\pm 1\}$ operiert auf der Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ durch Punktspiegelung. Der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ ist eine Überlagerung.

Beispiel: Die Gruppe $\{\pm 1\}$ operiert auf der Modellfläche $F_g^+ \subseteq \mathbb{R}^3$ durch Punktspiegelung. Der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \to F_g^-$ ist eine Überlagerung.

Definition M3A: Gruppenoperation

Sei $(G, \cdot, 1)$ eine Gruppe und X eine Menge. Eine **Linksoperation** $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ von G auf X ist eine Abbildung $\varphi : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x$, sodass gilt:

$$1 \cdot x = x \quad \text{und} \quad g' \cdot (g \cdot x) = (g' \cdot g) \cdot x \quad \text{für alle } g, g' \in G \text{ und } x \in X.$$

Wir schreiben kurz $gx = g \cdot x = \varphi(g, x)$. Wir definieren $x \sim y$ falls $y = gx$ für ein $g \in G$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Reflexivität: $x = 1x$. Symmetrie: Aus $y = gx$ folgt $g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = 1x = x$. Transitivität: Aus $y = gx$ und $z = g'y$ folgt $z = g'(gx) = (g'g)x$.

Gruppenoperation und Quotient

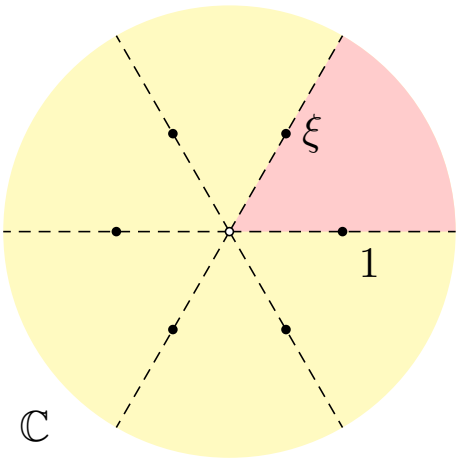
Die Äquivalenzklasse $Gx := \{ gx \mid g \in G \}$ nennen wir die **Bahn** oder den **Orbit** des Punktes $x \in X$ unter der Operation von G. Der **Bahnenraum** ist die Quotientenmenge $G \backslash X := \{ Gx \mid x \in X \}$. Die Quotientenabbildung ist $q : X \to G \backslash X : x \mapsto Gx$. Trägt X eine Topologie, so versehen wir $G \backslash X$ mit der Quotiententopologie. Zusammenfassend schreiben wir:

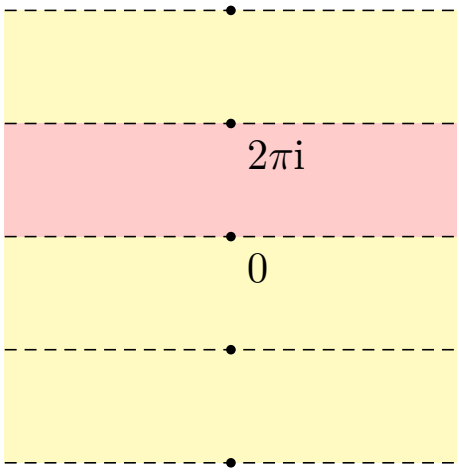
$$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{q} G \backslash X$$

Etwas allgemeiner und flexibler schreiben wir $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{p} Y$, wenn $\varphi : G \times X \to X$ eine Operation der Gruppe G auf dem Raum X und $p : X \to Y$ äquivalent zum Quotienten q ist, also ein Homöomorphismus $h : G \backslash X \xrightarrow{\sim} Y$ mit $p = h \circ q$ existiert. Zusammengefasst als Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, bend left, "\varphi"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & Y \\
& G \backslash X \arrow[ur, "h", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Gruppenoperation und Quotient



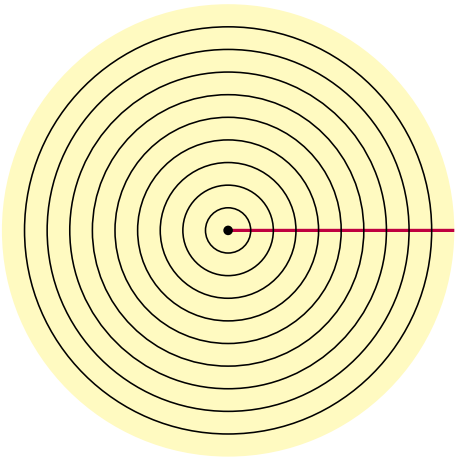


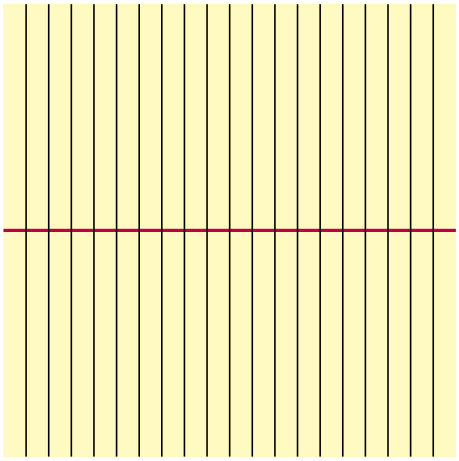
Beispiel M3c: Wir kennen bereits die folgenden Gruppenoperationen:

$$2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times, \qquad 2\pi\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 \quad \text{mit } p(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$
$$W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} \mathbb{C}^\times \xrightarrow{p_n} \mathbb{C}^\times, \qquad W_n \overset{\cdot}{\curvearrowright} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p_n} \mathbb{S}^1 \quad \text{mit } p_n(z) = z^n.$$

Hier ist $W_n = \{1, \xi_n, \xi_n^2, \dots, \xi_n^{n-1}\} \leq \mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}^\times$ die Untergruppe der $n$ten Einheitswurzeln, erzeugt von $\xi_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. Die angegebene Abbildung ist äquivalent zum Quotienten. Wiederholung: Wie gelingt das?

Gruppenoperation und Quotient

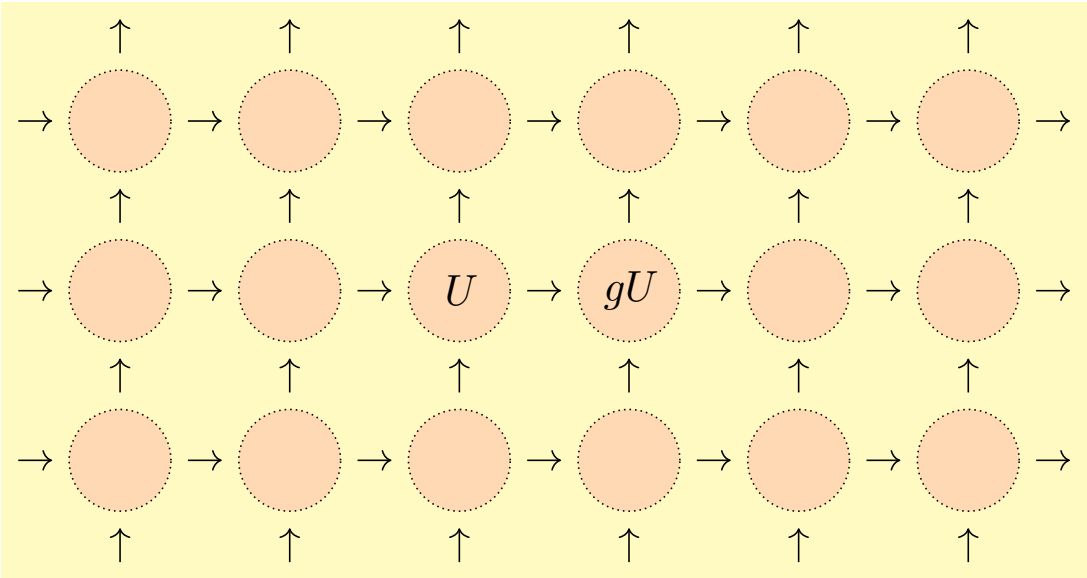




Beispiel M3d: $(\mathbb{R}, +) \overset{\varphi}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\varphi(t, z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}\, z$ und $p(z) = |z|$.
Die Abbildung p ist invariant, induziert also $\overline{p} : Q \to \mathbb{R}_{\geq 0} : \overline{p}([z]) = |z|$.
Der Schnitt $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$ liefert die stetige Abbildung
$\overline{s} = q \circ s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to Q : x \mapsto [(x, 0)]$. Es gilt $\overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}$ und $\overline{s} \circ \overline{p} = \mathrm{id}$.

Beispiel M3e: $(\mathbb{R}, +) \overset{\psi}{\curvearrowright} \mathbb{C} \xrightarrow{p} \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\psi(t, z) = \mathrm{i}t + z$ und $p(z) = \mathrm{re}(z)$.
Die Abbildung p ist invariant, induziert also $\overline{p} : Q \to \mathbb{R} : \overline{p}([z]) = \mathrm{re}(z)$.
Der Schnitt $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto x + 0\mathrm{i}$ liefert die stetige Abbildung
$\overline{s} = q \circ s : \mathbb{R} \to Q : x \mapsto [x + 0\mathrm{i}]$. Es gilt $\overline{p} \circ \overline{s} = \mathrm{id}$ und $\overline{s} \circ \overline{p} = \mathrm{id}$.

Gruppenoperation und Quotient



Beispiel M3F: Wir haben $\mathbb{Z}^2 \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1)^2$, wie hier skizziert.
Die diskrete Untergruppe $\mathbb{Z}^2$ von $(\mathbb{R}^2, +)$ operiert durch Translation.
Der Quotient ist äquivalent zu $p : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{S}^1)^2 : (t_1, t_2) \mapsto (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t_1}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t_2})$.

Wiederholung: Warum ist dies äquivalent zum Quotienten?
Ebenso für $\mathbb{Z}^n \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} (\mathbb{S}^1)^n$.

Gruppenoperation durch Homöomorphismen

Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ eine Gruppenoperation. Wir sagen, G **operiert durch Homöomorphismen**, wenn für jedes $g \in G$ die Linkstranslation $\varphi_g : X \to X : x \mapsto gx$ stetig ist. Dann ist $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ ebenfalls stetig. Damit entspricht φ dem Gruppenhomomorphismus

$$G \to \mathrm{Homeo}(X) : g \mapsto \varphi_g.$$

Insbesondere operiert G auf der Topologie $\mathcal{T}$ vermöge

$$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \mathcal{T} : (g, U) \mapsto gU.$$

Die Operation φ heißt **frei** (fixpunktfrei, ohne Fixpunkte), wenn $gx \neq x$ für alle $x \in X$ und $g \in G \setminus \{1\}$ gilt. Das heißt, für jeden Punkt $x \in X$ ist die Abbildung $G \to Gx : g \mapsto gx$ bijektiv.

Insbesondere ist φ dann **treu** (effektiv): Zu $g \neq g'$ in G existiert $x \in X$ mit $gx \neq g'x$. Das heißt, der Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{S}\, X$ ist injektiv. Wir können dann $G \leq \mathrm{Homeo}(X)$ als Untergruppe auffassen.

Topologisch freie Gruppenoperationen

Satz M3G: topologisch freie Gruppenoperation

Sei $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X \xrightarrow{q} Y$ eine Operation durch Homöomorphismen.

(1) Genau dann ist φ frei und q eine Überlagerung, wenn gilt:
Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine (offene) Umgebung $U \subseteq X$ mit

$$U \cap gU = \emptyset \quad \text{für alle } g \in G \setminus \{1\}.$$

Wir nennen die Operation $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ dann **überlagernd**
(traditionell auch **frei diskontinuierlich**, oder **topologisch frei**).

(2) Genau dann ist Y hausdorffsch, wenn gilt: Zu je zwei Punkten $x, x' \in X$ mit $Gx \neq Gx'$ existieren Umgebungen $U, U' \subseteq X$ mit

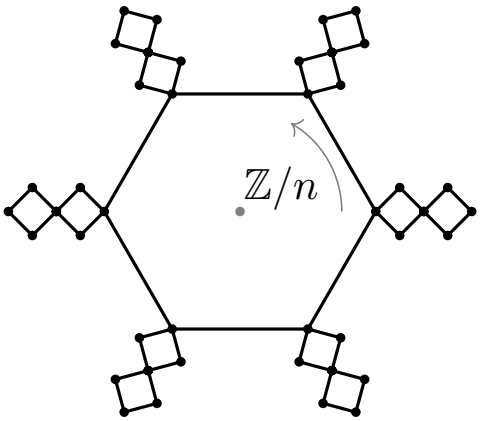
$$U \cap gU' = \emptyset \quad \text{für alle } g \in G.$$

Wir nennen die Operation $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$ dann **hausdorffsch**.

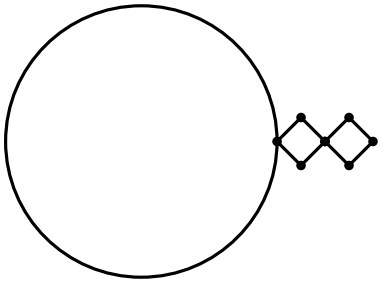
Übung: Dies folgt direkt aus den Definitionen. Prüfen Sie es nach!

Topologisch freie Gruppenoperationen

Galois–Überlagerungen



$\mathbb{Z}/n \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{p} X$



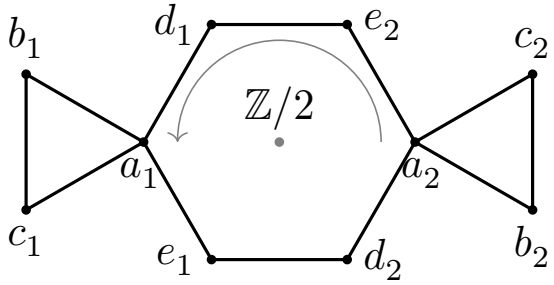
Definition M3J: Galois–Überlagerung

Wir nennen $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine **Galois–Überlagerung**, wenn die Operation φ überlagernd und der Raum $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist.

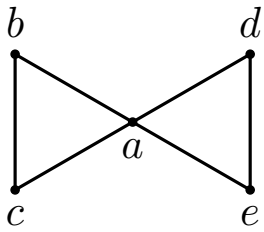
Ist $\tilde{X}$ sogar einfach zusammenhängend, so nennen wir $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} \tilde{X} \xrightarrow{p} X$ eine **universelle Überlagerung** von X oder ganz nüchtern und sachlich eine **einfach zusammenhängede Überlagerung**.

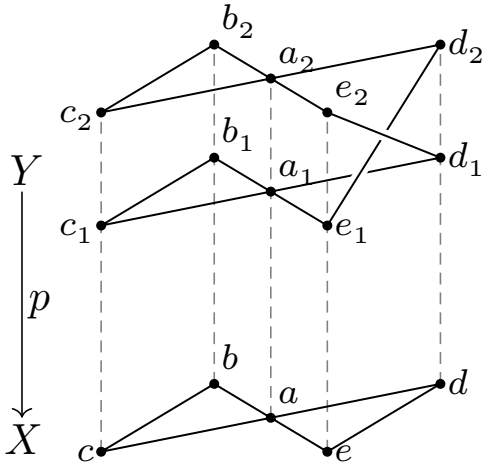
Galois–Überlagerungen

☺ Nahezu alle unsere bisher betrachteten Überlagerungen entstehen auf diese besonders schöne und elegante Weise. als Galois–Überlagerungen



$\mathbb{Z}/2 \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$





Diskrete Untergruppen

☺ Folgende Konstruktion für Galois-Überlagerungen ist besonders schön und typisch für viele topologisch-algebraische Anwendungen:

Satz M3M: diskrete Untergruppe

Sei $(G, \cdot, e)$ eine topologische Gruppe und $K \leq G$ eine diskrete Untergruppe. Dann operiert K überlagernd durch Linkstranslation $K \times G \to G : (k, g) \mapsto k \cdot g$. Ist G zudem wegzusammenhängend, so ist $K \curvearrowright G \twoheadrightarrow Q = K \backslash G$ eine Galois–Überlagerung.

Beweis: Da $K \leq G$ diskret ist, existiert $W \subseteq G$ offen mit $K \cap W = \{e\}$. Da die Abbildung $G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab^{-1}$ stetig ist, existieren offene Umgebungen V_1, V_2 von e in G mit $V_1 \cdot V_2^{-1} \subseteq W$. Mit $U = V_1 \cap V_2$ erhalten wir eine offene Umgebung von e in G mit $U \cdot U^{-1} \subseteq W$. Für jedes $g \in G$ ist Ug eine offene Umgebung. Aus $kUg \cap Ug \neq \emptyset$ mit $k \in K$ folgt $ku_1 g = u_2 g$ also $k = u_2 u_1^{-1} \in U \times U^{-1} \subseteq W$, also $k = e$. $\boxed{\text{QED}}$

Diskrete Untergruppen

Unsere obigen Paradebeispiele entstehen aus diskreten Untergruppen:

$$W_n \curvearrowright \mathbb{C}^\times \xrightarrow{p_n} \mathbb{C}^\times, \quad 2\pi i\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times, \quad \mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,$$
$$W_n \curvearrowright \mathbb{S}^1 \xrightarrow{p_n} \mathbb{S}^1, \quad 2\pi\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n \to (\mathbb{S}^1)^n.$$

Weitere Beispiele: Diskrete Untergruppen in $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ erhalten wir aus Isometriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^3$: Der Kegel über einem regulären n–Eck liefert C_n für $n = 3, 4, 5, \ldots$, der Doppelkegel liefert D_n. Neben diesen beiden unendlichen Familien haben wir drei sporadische Beispiele: Das Tetraeder liefert A_4, Oktaeder / Hexaeder S_4, Dodekaeder / Ikosaeder A_5. Jede diskrete Untergruppe von $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ ist eine dieser Gruppen (bis auf Konjugation). Erlaubt man zudem Spiegelungen, so gilt eine analoge Klassifikation für diskrete Gruppen in $\mathrm{GO}_3\,\mathbb{R} = \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \times \{\pm\mathrm{id}\}$.

Hochhebung von Wegen und Wegeklassen

Zu jeden Raum X mit Fußpunkt x_0 bezeichnen wir mit $P(X, x_0)$ bzw. $\Pi(X, x_0) = P(X, x_0)/_\sim$ die Menge aller Wege/klassen, die in x_0 beginnen.

Satz M4A: Hochhebung von Wegen und Wegeklassen

Jede Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ erlaubt eindeutige Hochhebung von Wegen und Homotopien (M2G) und induziert folgende Bijektionen:

$$p_\sharp(\tilde{\alpha}) := p \circ \tilde{\alpha} \qquad p_\flat(\alpha) := \tilde{\alpha}$$

dank eindeutiger Weghochhebung

$$\begin{tikzcd}
P(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, "\text{quot}"] \arrow[d, shift right, "p_\sharp"'] & \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, shift right, "p_\sharp"'] \\
P(X, x_0) \arrow[r, "\text{quot}"] \arrow[u, shift right, "p_\flat"'] \arrow[u, phantom, "\cong"] & \Pi(X, x_0) \arrow[u, shift right, "p_\flat"'] \arrow[u, phantom, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

$$p_\sharp([\tilde{\alpha}]) := [p \circ \tilde{\alpha}] \qquad p_\flat([\alpha]) := [\tilde{\alpha}]$$

dank Hochhebung von Homotopien

Aufgabe: Wiederholen Sie die Konstruktion von $p_\sharp$ und $p_\flat$: Warum sind beide wohldefiniert und invers zueinander?

Die musikalischen Vorzeichen $\sharp$ (Kreuz, Dur, Erhöhen) und $\flat$ (Be, Moll, Senken) bezeichnen jeweils den Startraum, oben $\tilde{X}$ und unten X.

Hochhebung von Wegen und Wegeklassen

Beweis: Jeder Weg $\alpha : ([0,1], 0) \to (X, x_0)$ erlaubt dank M2G eine eindeutige Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1], 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Wir setzen $p_\flat(\alpha) := \tilde{\alpha}$. Aus $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ folgt $p_\sharp \circ p_\flat = \mathrm{id}$. Dank Eindeutigkeit folgt $p_\flat \circ p_\sharp = \mathrm{id}$.

Die Abbildung $p_\sharp$ geht von der Menge P auf den Quotienten Π über: Jede Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$ induziert eine Homotopie $p\tilde{H} : p\tilde{\alpha} \sim p\tilde{\alpha}'$. Somit ist $p_\sharp([\tilde{\alpha}]) := [p \circ \tilde{\alpha}]$ wohldefiniert.

Auch $p_\flat$ geht von P auf den Quotienten Π über: Jede Homotopie $H : \alpha \sim \alpha'$ hebt sich dank M2G zu einer Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$. Somit ist $p_\flat([\alpha]) := [\tilde{\alpha}]$ wohldefiniert.

(Für die Homotopie H verlangen wir feste Endpunkte, $H(s, 0) = x_0$ und $H(s, 1) = x_1$ für alle $s \in [0, 1]$. Dies erfüllt auch die Hochhebung: $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{H}(s, 1) = \tilde{x}_1$ für alle $s \in [0, 1]$; dank Eindeutigkeit ist jede Hochhebung eines konstanten Weges selbst konstant.)

Demnach gilt auch auf den Quotienten $p_\sharp \circ p_\flat = \mathrm{id}$ und $p_\flat \circ p_\sharp = \mathrm{id}$. $\boxed{\text{QED}}$

Charakteristische Untergruppe

Jede stetige Abbildung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(p) = p_\sharp : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0) : [\alpha] \mapsto [p \circ \alpha]$

Hierbei ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subseteq \Pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ die Teilmenge aller Wegeklassen, die in $\tilde{x}_0$ beginnen und auch enden. Daraus folgt:

Korollar M4B: charakteristische Untergruppe

Ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, so ist $\pi_1(p)$ injektiv.

Dank der Injektion $\pi_1(p) : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0) : [\alpha] \mapsto [p \circ \alpha]$ können wir $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong p_\sharp(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \leq \pi_1(X, x_0)$ als Untergruppe betrachten. Sie heißt auch die **charakteristische Untergruppe** der Überlagerung p.

Für eine beliebige stetige Abbildung $f : (X, x) \to (Y, y)$ ist $f_\sharp$ keineswegs injektiv (L4H). Also nochmal zur Betonung, weil es so wichtig ist:

Beweis: Sei $p_\sharp([\alpha]) = p_\sharp([\beta])$. Es existiert also eine Homotopie $H : p\alpha \sim p\beta$. Ihre Hochhebung ist eine Homotopie $\tilde{H} : \alpha \sim \beta$. Also gilt $[\alpha] = [\beta]$. $\boxed{\text{QED}}$

Diese besondere Eigenschaft hat sofort erstaunliche Konsequenzen…

Erinnerung: Dimension und Rang

? Enthält ein K–Vektorraum $V \cong K^p$ der Dimension p möglicherweise einen Untervektorraum $U \leq V$ der Dimension $q > p$? Nein, niemals!

Beweis? Basisergänzungssatz! Gauß–Algorithmus: Jede Matrix $A \in K^{p \times q}$ bzw. K–lineare Abbildung $f : K^q \to K^p$ hat nicht-trivialen Kern.

? Enthält eine freie abelsche Gruppe $A \cong \mathbb{Z}^p$ vom Rang p vielleicht eine freie abelsche Untergruppe $U \leq A$ vom Rang $q > p$? Nein, niemals!

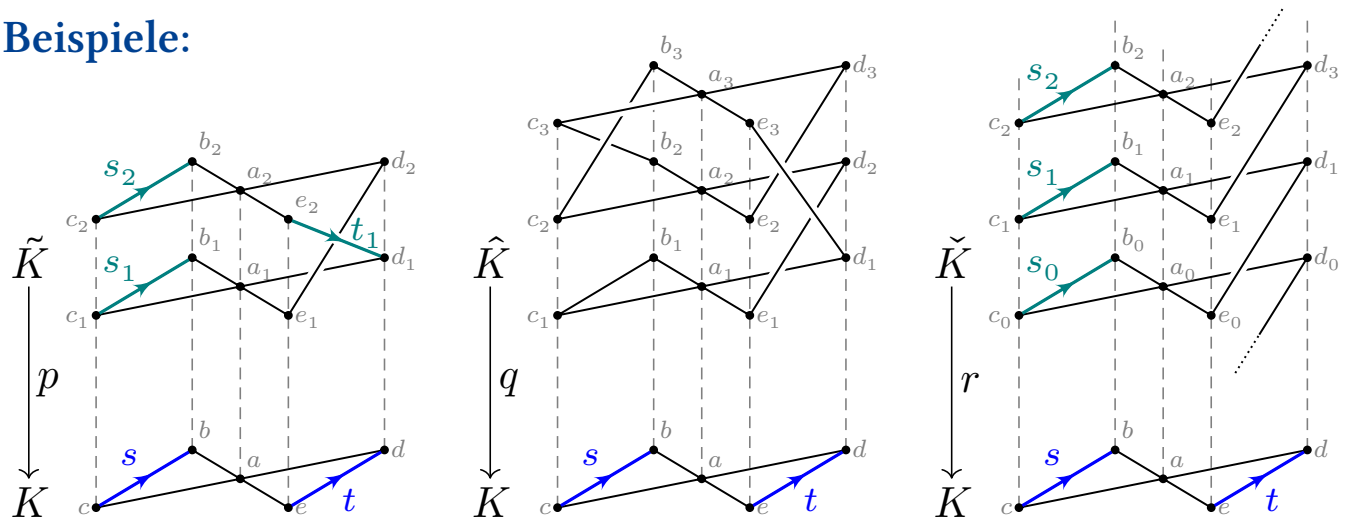
Beweis? Auch dies gelingt uns mit Gauß–Euklid: Jede Matrix $A \in \mathbb{Z}^{p \times q}$ bzw. $\mathbb{Z}$–lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}^q \to \mathbb{Z}^p$ hat nicht-trivialen Kern.

? Enthält eine freie Gruppe $F = \langle s_1, \dots, s_p \mid - \rangle$ vom Rang $p \geq 2$ eine freie Untergruppe $U \leq F$ vom Rang $q > p$? Unglaublich, aber wahr!

Die effizienten Werkzeuge der Linearen Algebra greifen hier nicht mehr. Naiv würde man vielleicht dennoch vermuten, per Extrapolation oder schlicht aus Mangel an Phantasie, dass jede Untergruppe $U \leq F$ Rang $q \in \{0, \dots, p\}$ hat. Überraschung: Diese naive Vermutung ist falsch!

Überraschend große Untergruppen

Beispiele:



Wir finden $\pi_1(K,a) = \langle s,t \,|\, - \rangle$ und $\pi_1(\tilde{K},a_1) = \langle s_1,s_2,t_1 \,|\, - \rangle$ sowie $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K},a_1) \hookrightarrow \pi_1(K,a)$ mit $s_1,s_2,t_1 \mapsto s,\ tst^{-1},\ t^2$.

☺ Somit enthält die freie Gruppe $F = \langle s,t \,|\, - \rangle$ vom Rang 2 tatsächlich eine freie Untergruppe $U = \langle s, tst^{-1}, t^2 \rangle$ vom Rang 3.

Punktprobe: Liegt $v = t^3$ bzw. $w = sts^{-1}t^{-1}$ in $U = \langle s, tst^{-1}, t^2 \rangle$? Wie können Sie dies prüfen und als Wort in s, tst^{-1}, t^2 darstellen?

Überraschend große Untergruppen

Ausführlich: Die obige Abbildung zeigt links die zweiblättrige simpliziale Überlagerung $p : \tilde{K} \to K$. Wir wählen hierzu einen Spannbaum $T \subseteq K$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(K,a)$ wird frei erzeugt von $K \setminus T = \{s,t\}$:

$$\pi_1(K,a) = \langle s,t \,|\, - \rangle$$

Ebenso wählen wir einen Spannbaum $\tilde{T} \subseteq \tilde{K}$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{K},\tilde{a})$ mit $\tilde{a} = a_1$ wird dann frei erzeugt von $\tilde{K} \setminus \tilde{T} = \{s_1,s_2,t_1\}$:

$$\pi_1(\tilde{K},\tilde{a}) = \langle s_1,s_2,t_1 \,|\, - \rangle$$

Der Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K},\tilde{a}) \to \pi_1(K,a)$ ist injektiv (M4B) und auf den von uns gewählten Erzeugern explizit gegeben durch:

$$p_\sharp(s_1) = s, \quad p_\sharp(s_2) = tst^{-1}, \quad p_\sharp(t_1) = t^2$$

Dies folgt aus der Definition durch Ablaufen der zugehörigen Wege: Hier gelingt Hochhebung von Wegen und Homotopien rein kombinatorisch!
Übung: Erklären Sie dies als simpliziale Alternative zu M4A/M4B.

Schreier Ersetzungverfahren / *rewriting*

Rewriting: Liegen die Gruppenelemente $v = t^3$ bzw. $w = sts^{-1}t^{-1}$ in U?

Allgemein: Wie können Sie für ein beliebiges Element $w \in F$ prüfen, ob $w \in U$ gilt, und falls möglich w als ein Wort in s, tst^{-1}, t^2 darstellen?

Algorithmus: (1) Wir schreiben $w \in \pi_1(K, a)$ als Kantenzug im Graphen (K, a) und heben diesen bezüglich p hoch zu $\tilde{w}$ im Graphen $(\tilde{K}, \tilde{a})$.

(2) Genau dann gilt $w \in U$, wenn sich $\tilde{w}$ in $(\tilde{K}, \tilde{a})$ schließt.

(3) In diesem Falle schreiben wir $\tilde{w} \in \pi_1(\tilde{K}, \tilde{a})$ als Wort in den freien Erzeugern, und erhalten so das gesuchte Wort $w = p_\sharp(w)$ in U.

Beispiel: Für $v = t^3$ in (K, a) schließt sich $\tilde{v}$ in $(\tilde{K}, \tilde{a})$ nicht, also gilt $v \notin U$. Für $w = sts^{-1}t^{-1}$ in (K, a) schließt sich $\tilde{w}$ in $(\tilde{K}, \tilde{a})$. So finden wir die gesuchten Wörter $\tilde{w} = s_1 s_2^{-1} \mapsto w = s \cdot (tst^{-1})^{-1}$ in den Erzeugern.

Dank Freiheit der Gruppe ist diese frei reduzierte Darstellung eindeutig. *Die* gesuchte Lösung ist eindeutig, und der Algorithmus berechnet sie.

Schreier Ersetzungverfahren / *rewriting*

Aufgabe: Finden Sie in $F = \langle s, t \mid - \rangle$ eine freie Untergruppe vom Rang 4.

Lösung: Das gelingt mit der obigen Überlagerung $q : \hat{K} \to K$.
Übung: Schreiben Sie dies explizit in freien Erzeugern aus.

Aufgabe: Finden Sie in der freien Gruppe $F = \langle s, t \mid - \rangle$ vom Rang 2 eine freie Untergruppe $U \leq F$ von *unendlichem* Rang!

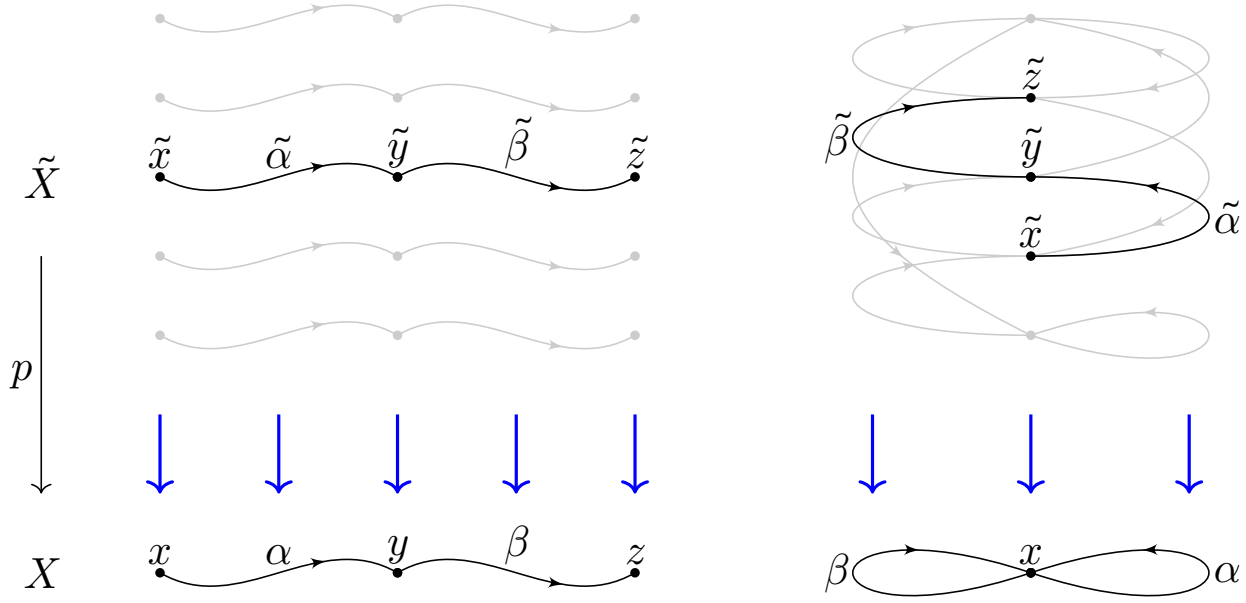
Lösung: Das gelingt mit der obigen Überlagerung $r : \check{K} \to K$.
Explizit finden wir die Untergruppe $U = \langle t^k s t^{-k} : k \in \mathbb{Z} \rangle$.
Diese wird frei erzeugt von $(s_k = t^k s t^{-k})_{k \in \mathbb{Z}}$.

☺ Die Darstellung als Überlagerung macht alles offensichtlich: $U \leq F$ ist frei und wir können jedes Wort $w \in U$ in s, t umschreiben in $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

⁇ Alles gelingt auch direkt algebraisch und rein rechnerisch, ohne Überlagerung und ohne jede geometrische Anschauung.

☺ Menschen sind Augenwesen. Daher gefällt mir das Zusammenspiel von Algebra und Topologie immer gut, und hier ganz besonders.

Fasertransport



Satz M4E: Fasertransport durch Hochhebung

Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1],0) \to (X,x)$ und Startwert $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existiert bezüglich p genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1],0) \to (\tilde{X},\tilde{x})$. Wir setzen $\tilde{x} \cdot [\alpha] := \tilde{\alpha}(1)$. Dies ist wohldefiniert und erfüllt $\tilde{x} \cdot [1_x] = \tilde{x}$ und $\tilde{x} \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]) = (\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$.

Fasertransport

Aufgabe: Übersetzen Sie das obige Bild in einen Beweis.

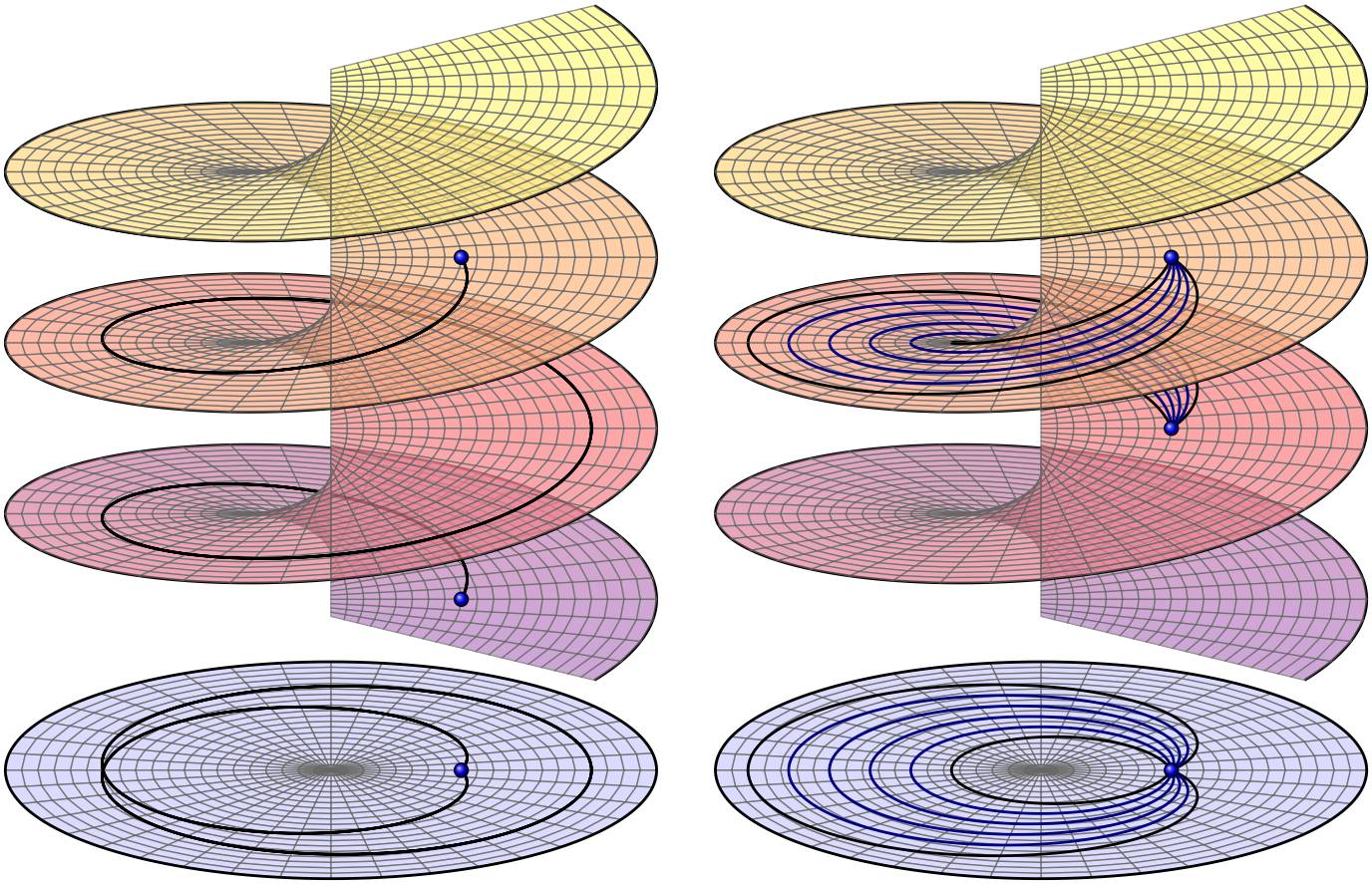
Beweis: Zur Wohldefiniertheit seien $\alpha, \alpha' \in P(X,x,y)$ und dazu $H : \alpha \sim \alpha'$ eine Homotopie bei festen Endpunkten. Diese hebt sich zu einer Homotopie $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \sim \tilde{\alpha}'$, ebenfalls mit festen Endpunkten. Insbesondere gilt $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$, also ist $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x} \cdot [\alpha']$ wohldefiniert.

Ist $\alpha = 1_x$ konstant, so auch $\tilde{\alpha} = 1_{\tilde{x}}$, also gilt $\tilde{x} \cdot [1_x] = 1_{\tilde{x}}(1) = \tilde{x}$.

Wir verknüpfen den Weg $\alpha : [0,1] \to X$ von $\alpha(0) = x$ nach $\alpha(1) = y$ mit $\beta : [0,1] \to X$ von $\beta(0) = y$ nach $\beta(1) = z$ zu $\gamma = \alpha * \beta$ von x nach z. Die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ läuft dann von $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ zu einem Punkt $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$. Die anschließende Hochhebung $\tilde{\beta}$ läuft von $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$ zu einem Punkt $\tilde{z} \in p^{-1}(z)$. Ihre Verknüpfung $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$ erfüllt $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, ist also die Hochhebung von $\gamma = \alpha * \beta$. Sie läuft von $\tilde{x}$ über $\tilde{y}$ nach $\tilde{z}$. Hieraus folgt:

$$(\tilde{x} \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] = \tilde{y} \cdot [\beta] = \tilde{z},$$
$$\tilde{x} \cdot ([\alpha] \cdot [\beta]) = \tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{z}.$$

Fasertransport



Fasertransport

Vornehm formuliert haben wir damit folgendes bewiesen:

Satz M4E: Fasertransport als Funktor

Jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ definiert einen Funktor $F : \Pi(X) \to \mathsf{Set}$: Jedem Punkt $x \in X$ wird seine Faser $F_x = p^{-1}(x) = \{\, \tilde{x} \in \tilde{X} \mid p(\tilde{x}) = x \,\}$ zugeordnet. Jeder Wegeklasse $[\alpha] : x \to y$ in $\Pi(X)$ wird die Abbildung $F_{[\alpha]} : F_x \to F_y : \tilde{x} \mapsto \tilde{x} \cdot [\alpha]$ in Set zugeordnet, als Rechtskategorien.

In der Kategorie $\Pi(X)$ ist jeder Morphismus $[\alpha] : x \to y$ invertierbar, dank der Wegumkehr $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ in $P(X)$ mit $\alpha * \bar{\alpha} \sim 1_x$ und $\bar{\alpha} * \alpha \sim 1_y$.

☺ Demnach ist die zugehörige Abbildung $F_{[\alpha]} : F_x \xrightarrow{\sim} F_y$ eine Bijektion, denn $F_{[\alpha]} \circ F_{[\bar{\alpha}]} = \mathrm{id}_{F_x}$ und $F_{[\bar{\alpha}]} \circ F_{[\alpha]} = \mathrm{id}_{F_y}$. Über jeder Wegkomponente von X haben je zwei Fasern F_x und F_y insbesondere dieselbe Mächtigkeit.

Letzteres gilt allgemein sogar für Komponenten statt Wegkomponenten. Wenn wir X als lokal wegzusammenhängend annehmen, so wie wir dies ohnehin tun wollen, dann fallen beide Begriffe glücklich zusammen.

Monodromie

Definition M4F: Monodromie

Die **Monodromie** der Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist die Rechtsoperation $F_x \times \pi_1(X, x) \to F_x$ der Fundamentalgruppe in x auf der Faser über x.

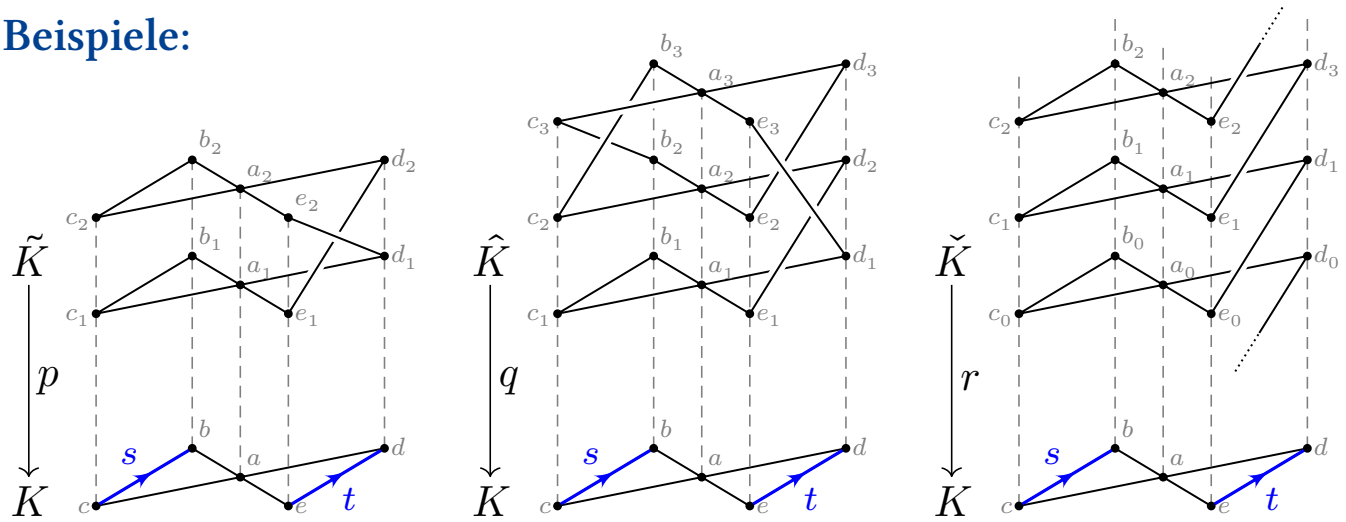
Beispiel: Zu $\mathbb{Z} \overset{+}{\curvearrowright} \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1$ mit $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$ gilt $\tilde{x} \cdot [\alpha] = \tilde{x} + \deg(\alpha)$.

Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1], 0) \to (\mathbb{S}^1, x)$ und Startwert $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1], 0) \to (\mathbb{R}, \tilde{x})$. Die Bedingung $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ bedeutet $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \tilde{\alpha}(t)} = \alpha(t)$. Somit misst $\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(0)$ die Winkeländerung. Die Monodromie $\mathbb{Z} \times \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z} : k \cdot [\alpha] = k + \deg(\alpha)$ zählt Umläufe.

☺ Anschaulich können wir uns $\mathbb{S}^1$ und $\mathbb{R}$ aus Draht vorstellen und darauf die Punkte $x \in \mathbb{S}^1$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ als bewegliche Perlen auffädeln, ähnlich einem Abakus. Jeder Weg $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ verschiebt diese Perle auf $\mathbb{S}^1$ von x nach y und gleichzeitig die hieran gekoppelte Perle auf $\mathbb{R}$ von $\tilde{x}$ nach $\tilde{y}$. Selbst wenn α geschlossen ist, also $x = y$ gilt, kann dabei durchaus $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ gelten. Die Höhendifferenz $\tilde{y} - \tilde{x}$ zählt die Umläufe.

Monodromie

Beispiele:



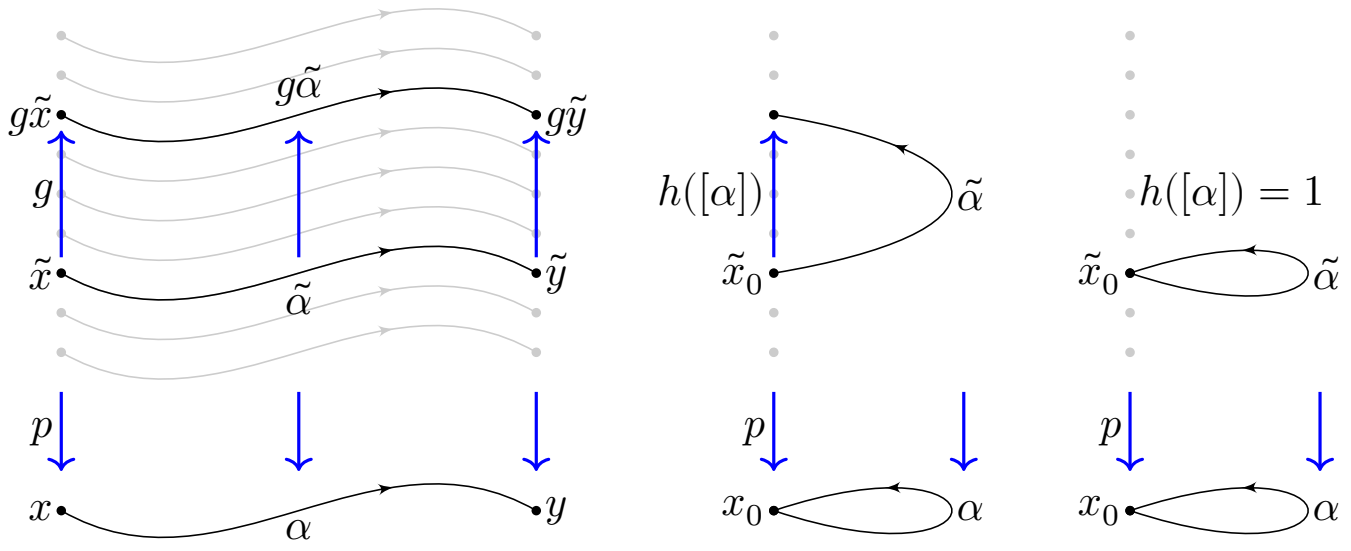
Beispiel: Wir betrachten erneut die obige Überlagerung $p : \tilde{K} \to K$. Die Monodromie ist $a_1 \cdot s = a_1$, $a_2 \cdot s = a_2$ und $a_1 \cdot t = a_2$, $a_2 \cdot t = a_1$, kurz $F_s = \mathrm{id}$ und $F_t = (a_1, a_2)$ als Permutation durch Fasertransport.

☺ Die Monodromie beschreibt den Wechsel der Etagen über die Treppe.

Für $q : \hat{K} \to K$ finden wir $F_s = (a_2, a_3)$ und $F_t = (a_1, a_2, a_3)$.
Für $r : \check{K} \to K$ finden wir $a_k \cdot s = a_k$ und $a_k \cdot t = a_{k+1}$.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Für jede Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X, x_0)$ finden wir:



Diese Graphik zeigt die Konstruktion des Gruppenhomomorphismus $h : \pi_1(X, x_0) \to G$ durch die Transportbedingung $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0$. Daraus folgt die kurze exakte Sequenz $(q_\sharp, h)$. Das ist folgender Satz.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Satz M4G: kurze exakte Sequenz

Für jede Überlagerung $G \curvearrowright (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q} (X, x_0)$ gilt:

(1) Die Operation $G \curvearrowright \tilde{X}$ kommutiert mit dem Fasertransport $\tilde{X} \curvearrowleft \Pi(X)$: $(g \cdot \tilde{x}) \cdot [\alpha] = g \cdot (\tilde{x} \cdot [\alpha])$ für alle $g \in G$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ sowie $[\alpha] \in \Pi(X, q\tilde{x})$.

(2) Wir erhalten daraus den Gruppenhomomorphismus $h : \pi_1(X, x_0) \to G$ definiert durch $\tilde{x}_0 \cdot [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0$ mit $\operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Im}(q_\sharp)$ und $\operatorname{Im}(h) = G_0 := \{ g \in G \mid [g \cdot \tilde{x}_0] = [\tilde{x}_0] \}$.

Elegant zusammengefasst: Wir erhalten die kurze exakte Sequenz (SES)

$$1 \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G_0 \longrightarrow 1.$$

Dies induziert den Isomorphismus $\bar{h} : \pi_1(X, x_0)/q_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G_0$.
Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, also q galoisch, so gilt hier $G_0 = G$.
Ist $\tilde{X}$ einfach zshgd, also q universell, so folgt $h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G$.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Dies fasst die geometrische Situation konzis algebraisch zusammen. Exaktheit bedeutet „Bild = Kern“. Hier heißt das links: $q_\sharp$ ist injektiv, rechts: h ist surjektiv, und zwischen beiden gilt $\mathrm{Im}(q_\sharp) = \mathrm{Ker}(h)$.

☺ Anders gesagt, wir erhalten den Gruppenisomorphismus

$$\bar{h} : \pi_1(X, x_0)/q_\sharp \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G_0.$$

Zur Erinnerung (M3J): Ist $G \curvearrowright \tilde{X} \xrightarrow{q} X$ eine frei diskontinuierliche Operation und $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so nennen wir q eine *Galois–Überlagerung*. Ist $\tilde{X}$ sogar einfach zusammenhängend, so nennen wir $q : \tilde{X} \to X$ eine *universelle Überlagerung* von X.

☺ Aus Satz M4G erhalten wir in diesem Falle den Isomorphismus

$$h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G.$$

Allgemein können wir so die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ aus der Decktransformationsgruppe G berechnen und umgekehrt.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Der Satz ist vollkommen explizit, zu seinem Beweis genügt geduldiges Nachrechnen. Alle hierzu benötigten Hilfsmittel haben wir vorbereitet. Wir wissen bereits aus Satz M3G, dass $q : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. Die Aussagen des Satzes folgen nun dank der eindeutigen Hochhebung von Wegen und Homotopien, siehe Satz M2G. Damit übersetzen wir die obige Graphik sorgsam in linearen Text und logische Argumente:

Beweis: (1) Zu jedem Weg $\alpha : ([0,1], 0) \to (X, x)$ und Anfangspunkt $\tilde{x} \in q^{-1}(x)$ existiert genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha} : ([0,1], 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x})$, mit $q \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Für $g \in G$ erfüllt $g\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ dann $q \circ (g\tilde{\alpha}) = q\tilde{\alpha} = \alpha$, ist also die Hochhebung von α mit Startpunkt $g\tilde{x}$. Somit gilt

$$(g \cdot \tilde{x}) \cdot [\alpha] \quad = \quad g\tilde{\alpha}(1) \quad = \quad g \cdot (\tilde{x} \cdot [\alpha]).$$

☺ Die obige Skizze fasst dies wunderschön bildlich zusammen, die algebraische Rechnung formalisiert elegant unsere Anschauung. Wir üben und nutzen immer gerne die topologische Zweisprachigkeit: Die Graphik bietet Intuition, die Formel sichert die nötige Präzision.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

(2) Jede Schleife $\alpha : [0,1] \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ hebt sich zu $\tilde\alpha : [0,1] \to \tilde X$ mit $\tilde\alpha(0) = \tilde x_0$. Wegen $q \circ \tilde\alpha = \alpha$ gilt $q(\tilde\alpha(1)) = x_0$, also $\tilde\alpha(1) = g\tilde x_0$ für genau ein Gruppenelement $g \in G$. Dies definiert $h : \pi_1(X, x_0) \to G$ durch $h([\alpha]) = g$, zusammengefasst $\tilde x_0 \cdot [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde x_0$.

Dies ist ein Gruppenhomomorphismus: Für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt

$$h([\alpha]\cdot[\beta])\cdot\tilde x_0 \overset{\text{Def}}{=} \tilde x_0\cdot([\alpha]\cdot[\beta]) \underset{\text{M4E}}{\overset{\text{Ass}}{=}} (\tilde x_0\cdot[\alpha])\cdot[\beta] \overset{\text{Def}}{=} (h([\alpha])\cdot\tilde x_0)\cdot[\beta]$$

$$\underset{(1)}{\overset{\text{Com}}{=}} h([\alpha])\cdot(\tilde x_0\cdot[\beta]) \overset{\text{Def}}{=} h([\alpha])\cdot(h([\beta])\cdot\tilde x_0) \underset{\text{M3A}}{\overset{\text{Ass}}{=}} (h([\alpha])\cdot h([\beta]))\cdot\tilde x_0$$

Daraus folgt $h([\alpha]\cdot[\beta]) = h([\alpha])\cdot h([\beta])$, da die Operation $G \curvearrowright \tilde X$ frei ist.

☺ Der reibungslose Wechsel von rechts nach links ist bemerkenswert, daher habe ich diese kurze Rechnung fein säuberlich ausgeschrieben.

Wir erleben das perfekte Zusammenspiel der Linksoperation $G \curvearrowright \tilde X$ durch Decktransformation, speziell $G \curvearrowright F_{x_0}$, und der Rechtsoperation $F_{x_0} \curvearrowleft \pi_1(X, x_0)$ durch Fasertransport. Das ist die entscheidende Idee dieser Konstruktion. Der Rest ist sorgfältiges Rechnen.

Die kurze exakte Sequenz einer Galois–Überlagerung

Die Sequenz $1 \to \pi_1(\tilde X, \tilde x_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G_0 \to 1$ ist exakt.

(2a) Der Gruppenhomomorphismus $q_\sharp$ ist injektiv (M4B).

(2b) Für $[\tilde\alpha] \in \pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$ gilt $h(q_\sharp([\tilde\alpha])) = 1$, also $\operatorname{Im}(q_\sharp) \subseteq \operatorname{Ker}(h)$.

(2c) Für $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $h([\alpha]) = 1$ gdw $\tilde\alpha$ sich schließt, also $[\tilde\alpha] \in \pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$ gilt. Das zeigt $\operatorname{Im}(q_\sharp) \supseteq \operatorname{Ker}(h)$.

(2d) Für $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ und $g = h([\alpha])$ gilt $g \cdot \tilde x_0 = \tilde x_0 \cdot [\alpha]$, also sind $g \cdot \tilde x_0$ und $\tilde x_0$ wegverbindbar. Das zeigt $\operatorname{Im}(h) \subseteq G_0$.

(2e) Sind $g \cdot \tilde x_0$ und $\tilde x_0$ verbindbar durch einen Weg $\tilde\alpha$, so haben wir $[\alpha] = q_\sharp([\tilde\alpha]) \in \pi_1(X, x_0)$ und $g = h([\alpha])$. Das zeigt $\operatorname{Im}(h) \supseteq G_0$. $\boxed{\text{QED}}$

☺ Ist zudem $\tilde X$ wegzusammenhängend, also $G \curvearrowright (\tilde X, \tilde x_0) \xrightarrow{q} (X, x_0)$ eine Galois–Überlagerung, so gilt $G_0 = G$ und somit $h : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow G$. Ist $\tilde X$ sogar einfach zshgd, also q universell, so folgt $h : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} G$. All diese Daten und Eigenschaften fassen wir prägnant zusammen: Die Sequenz $1 \to \pi_1(\tilde X, \tilde x_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{h} G \to 1$ ist exakt.

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

Beispiel: Polarkoordinaten

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, bend left, "+", "(k,x)\mapsto k+x"'] & (\mathbb{R},0) \arrow[r, two heads, "p", "t\mapsto e^{2\pi i t}"'] & (\mathbb{S}^1,1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{R},0) \arrow[r, hook, "p_\sharp"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, two heads, "h", "\cong"'] \arrow[d, "\deg", "\cong"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Beispiel: Exponentialfunktion

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, bend left, "\varphi", "(k,z)\mapsto 2\pi i k+z"'] & (\mathbb{C},0) \arrow[r, two heads, "\exp", "z\mapsto e^z"'] & (\mathbb{C}^\times,1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{C},0) \arrow[r, hook, "\exp_\sharp"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathbb{C}^\times,1) \arrow[r, two heads, "h", "\cong"'] \arrow[d, "\deg", "\cong"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

Beispiel: Potenz auf $\mathbb{S}^1$

$$\begin{tikzcd}
W_n \arrow[r, bend left, "\cdot", "(\xi,z)\mapsto \xi z"'] & (\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, two heads, "p", "z\mapsto z^n"'] & (\mathbb{S}^1,1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, hook, "p_\sharp"] \arrow[d, "\deg", "\cong"'] & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "\deg", "\cong"'] & W_n \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{quot}"] & \mathbb{Z}/n
\end{tikzcd}$$

Beispiel: Potenz auf $\mathbb{C}^\times$

$$\begin{tikzcd}
W_n \arrow[r, bend left, "\cdot", "(\xi,z)\mapsto \xi z"'] & (\mathbb{C}^\times,1) \arrow[r, two heads, "p", "z\mapsto z^n"'] & (\mathbb{C}^\times,1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{C}^\times,1) \arrow[r, hook, "p_\sharp"] \arrow[d, "\deg", "\cong"'] & \pi_1(\mathbb{C}^\times,1) \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "\deg", "\cong"'] & W_n \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{quot}"] & \mathbb{Z}/n
\end{tikzcd}$$

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

Beispiel: reell projektiver Raum ($n \geq 2$)

$$\begin{tikzcd}
\{\pm 1\} \arrow[r, bend left, "\cdot", "(s,x)\mapsto sx"'] & (\mathbb{S}^n, e_1) \arrow[r, two heads, "q", "x\mapsto[x]"'] & (\mathbb{RP}^n, \bar{e}_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^n, e_1) \arrow[r, hook, "q_\sharp"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathbb{RP}^n, \bar{e}_1) \arrow[r, two heads, "h", "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] & \{\pm 1\} \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}/2
\end{tikzcd}$$

Beispiel: reell projektive Gerade

$$\begin{tikzcd}
\{\pm 1\} \arrow[r, bend left, "\cdot", "(s,x)\mapsto sx"'] & (\mathbb{S}^1, e_1) \arrow[r, two heads, "q", "x\mapsto[x]"'] & (\mathbb{RP}^1, \bar{e}_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \arrow[r, hook, "q_\sharp"] \arrow[d, "\deg"', "\cong"] & \pi_1(\mathbb{RP}^1, \bar{e}_1) \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "\deg"', "\cong"] & \{\pm 1\} \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{quot}"] & \mathbb{Z}/2
\end{tikzcd}$$

Die kurze exakte Sequenz: Beispiele

Beispiel: die Drehgruppe $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$, parametrisiert durch $\rho(t) = \left[\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right]$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, bend left, "+", "(k,t)\mapsto k+t"'] & (\mathbb{R}, 0) \arrow[r, two heads, "\rho"] & (\mathrm{SO}_2, 1)
\end{tikzcd}$$

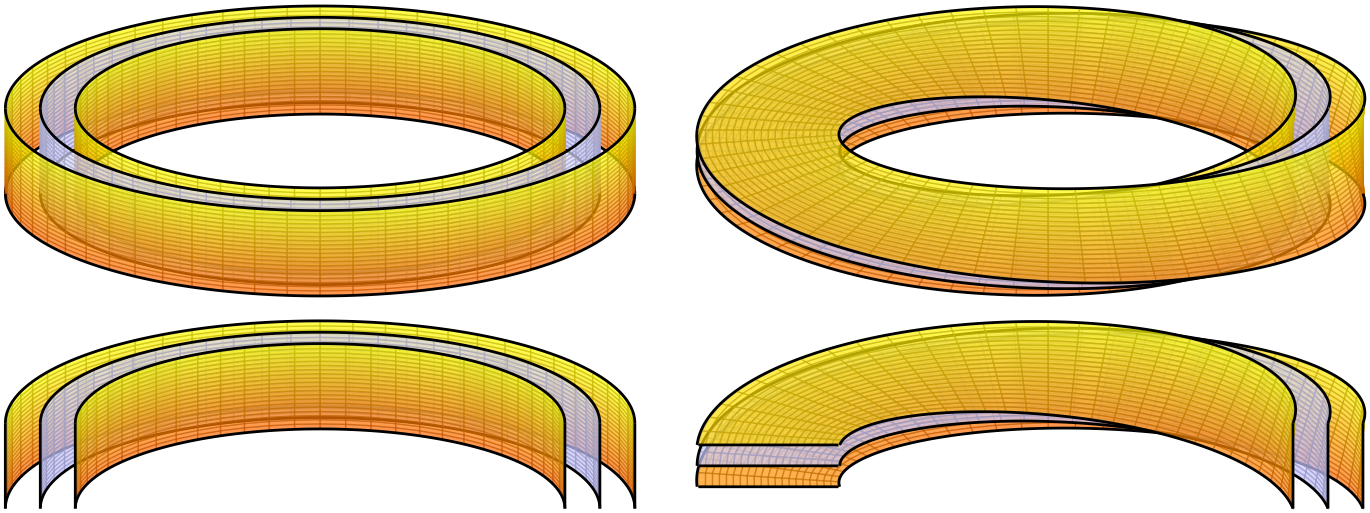
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{R}, 0) \arrow[r, hook, "\rho_\sharp"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathrm{SO}_2, 1) \arrow[r, two heads, "h", "\cong"'] \arrow[d, "\deg"', "\cong"] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Beispiel: die Drehgruppe $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$, parametrisiert durch $\rho : \mathbb{H} \supseteq \mathbb{S}^3 \to \mathrm{SO}_3$

$$\begin{tikzcd}
\{\pm 1\} \arrow[r, bend left, "\cdot", "(s,x)\mapsto sx"'] & (\mathbb{S}^3, 1) \arrow[r, two heads, "\rho"] & (\mathrm{SO}_3, 1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^3, 1) \arrow[r, hook, "q_\sharp"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(\mathrm{SO}_3, 1) \arrow[r, two heads, "h", "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] & \{\pm 1\} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}/2
\end{tikzcd}$$

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit



Sei M eine zshgde Mannigfaltigkeit und $\mathscr{A} = \{k : M \supseteq U_k \xrightarrow{\sim} V_k \subseteq \mathbb{R}^n_{\geq 0}\}$ ein Atlas. Zwei Karten h, k um $a \in M$ sind *gleich orientiert*, $h \approx_a k$, wenn der Kartenwechsel $(V_{hk}, h(a)) \xrightarrow{\sim} (V_{kh}, k(a))$ Orientierung erhält (J7P). Dies ist eine Äquivalenzrelation. Sei $[k]_a$ die Äquivalenzklasse aller Karten $h \in \mathscr{A}$ mit $h \approx_a k$. Wir nehmen an, dass unser Atlas $\mathscr{A}$ um jeden Punkt $a \in M$ Karten beider Orientierungen enthält, und definieren $\tilde{M} := \{\, (a, [k]_a) \mid k \in \mathscr{A},\ a \in U_k \,\}$ und $p : \tilde{M} \to M : (a, [k]_a) \mapsto a$.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Satz M4P: Orientierungsüberlagerung

So erhalten wir die zweiblättrige Orientierungsüberlagerung:

$$\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M} \xrightarrow{p} M \quad \Longrightarrow \quad \pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{\operatorname{sign}} \{\pm 1\}$$

Dabei misst der Fakor $\operatorname{sign}([\alpha]) \in \{\pm 1\}$ ob die Schleife α in (M, x_0) die lokale Orientierung in x_0 beim Transport erhält oder umkehrt. Genau dann ist die Mannigfaltigkeit M orientierbar, wenn sign trivial ist.

(1) Ist M nicht-orientierbar, so ist der Homomorphismus sign surjektiv, und die zweiblättrige Überlagerung $p : \tilde{M} \to M$ ist zshgd / nicht-trivial.

(2) Ist M orientierbar, so ist sign trivial, und p ist trivial / unzshgd. Jeder der beiden Schnitte $s : M \to \tilde{M}$ ist dann eine Orientierung: In jedem Punkt $a \in M$ wählt $s(a) = [k]_a$ eine lokale Orientierung.

Aufgabe: Vervollständigen Sie die Konstruktion von $\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M} \xrightarrow{p} M$ und beweisen Sie die hier gemachten Aussagen. Illustrieren Sie dies mit Zylindermantel und Möbius–Band, wie oben eindrücklich skizziert.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Beweis: Jedes Kartengebiet U_k sei zusammenhängend; notfalls zerlegen wir jedes Kartengebiet in seine (offenen!) Komponenten. Zur Karte $k \in \mathscr{A}$ setzen wir $\tilde{U}_k := \{\, (a, [k]_a) \mid a \in U_k \,\} \subseteq \tilde{M}$ und definieren hierauf die Karte $\tilde{k} : \tilde{U}_k \xrightarrow{\sim} V_k : (a, [k]_a) \mapsto k(a)$. Die Mengen $\tilde{k}^{-1}(V)$ mit $k \in \mathscr{A}$ und $V \subseteq V_k$ offen erfüllen (UB1–3) aus D3v, definieren also eine Topologie auf $\tilde{M}$.

Damit ist $\tilde{M}$ eine Mannigfaltigkeit, der Atlas $\tilde{\mathscr{A}} = \{\, \tilde{k} \mid k \in \mathscr{A} \,\}$ ist orientiert, und die Projektion $p : \tilde{M} \to M : (a, [k]_a) \mapsto a$ ist eine zweiblättrige Überlagerung mit $\tilde{k} = k \circ p$ für jede Karte $k \in \mathscr{A}$. Hierauf operiert die Gruppe $\{\pm 1\}$ durch Orientierungswechsel (M3o):

$$\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M} \xrightarrow{p} M \quad \Longrightarrow \quad \pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_1(M, x_0) \xrightarrow{\operatorname{sign}} \{\pm 1\}$$

Jeder Weg $\alpha : [0,1] \to M$ transportiert lokale Orientierungen. Für einen geschlossenen Weg mit Start und Ziel in x_0 erhalten wir $\operatorname{sign}([\alpha]) = \pm 1$, je nachdem, ob die Schleife α die Orientierung erhält oder umkehrt. Dies definiert den Gruppenhomomorphismus $\operatorname{sign} : \pi_1(M, x_0) \to \{\pm 1\}$.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Genau dann ist die Mannigfaltigkeit M orientierbar, wenn sign trivial ist, also $\operatorname{sign}([\alpha]) = +1$ für alle Schleifen α in (M, x_0) gilt. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit M orientierbar. Dazu genügt, dass die Gruppe $\pi_1(M, x_0)$ oder ihre Abelschmachung $H_1(M) = \pi_1(M, x_0)_{\mathrm{ab}}$ endlich und von ungerader Ordnung ist.

Beispiel: Die obige Abbildung zeigt links den Zylindermantel $M \cong \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ und seine Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$. Dank Orientierbarkeit von M zerfällt $\tilde{M}$ in zwei Komponenten, jede entspricht der Wahl einer Orientierung, als Schnitt $s : M \to \tilde{M}$.

Rechts sehen wir das Möbius–Band $M \cong \mathbb{S}^1 \ltimes [-1, 1]$ und seine Orientierungsüberlagerung $p : \tilde{M} \to M$: Das mittlere Band ist die Mannigfaltigkeit M, die beiden äußeren bilden $\tilde{M}$; die untere Graphik zeigt einen Querschnitt. Dank Nicht-Orientierbarkeit von M ist $\tilde{M}$ zusammenhängend; es gilt $\tilde{M} \cong \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$. (Sie können es basteln!) Die Operation $\{\pm 1\} \curvearrowright \tilde{M}$ vertauscht die beiden lokalen Orientierungen.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Beispiele: Die Orientierungsüberlagerung der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist die vertraute zweiblättrige Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^2$.

Die Orientierungsüberlagerung der Kleinschen Flasche F_1^- ist der Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, genauer der Quotient $\{\pm 1\} \curvearrowright F_1^+ \twoheadrightarrow F_1^-$, siehe M4N.

Die Orientierungsüberlagerung der nicht-orientierbaren Fläche F_g^- ist die vertraute zweiblättrige Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright F_g^+ \twoheadrightarrow F_g^-$.

Was ist die Orientierungsüberlagerung des projektiven Raumes $\mathbb{RP}^n$? Die naheliegende Vermutung ist die vertraute zweifache Überlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$. Das gilt allerdings nur in gerader Dimension $n = 2m$. In ungerader Dimension $n = 2m + 1$ hingegen ist $\mathbb{RP}^n$ orientierbar, und die Orientierungsüberlagerung ist trivial, $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{RP}^n \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^n$.

Der erste Fall $\mathbb{RP}^1 \cong \mathbb{S}^1$ ergibt die Orientierungsüberlagerung $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{RP}^1 \times \{\pm 1\} \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^1$ und nicht $\{\pm 1\} \curvearrowright \mathbb{S}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^1$.

Ebenso interessant ist $\mathbb{RP}^3 \cong \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$: Diese Mannigfaltigkeit ist orientierbar (L6Z), wie jede Lie–Gruppe sogar parallelisierbar.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Science Fiction: Die Welt, in der wir leben, ist dreidimensional, zumindest lokal in unserer unmittelbaren Umgebung scheint diese Idealisierung eine gute Näherung an unsere alltägliche Erfahrung zu sein. Es ist denkbar, dass diese 3–Mannigfaltigkeit M nicht-orientierbar sein könnte. Als Gedankenexperiment schicken wir eine Probe (Teilchen, Raumsonde, Person) auf eine weite Rundreise durch das Universum: Bei einem orientierungsumkehrenden Weg kehrt sie gespiegelt zurück!

Mathematisch denkbar sind neben der Orientierungsumkehr des Raumes (P = *parity reversal*) noch verrücktere, nämlich die der Zeit (T = *time reversal*) und der Ladung (C = *charge reversal*). Lokal sind dies wichtige physikalische Symmetrien, ihr Nicht-Bestehen erlaubt Links und Rechts zu unterscheiden, Zukunft und Vergangenheit, Materie und Antimaterie.

? Ob diese lokal definierten Eigenschaften auch global eine Bedeutung haben, hängt von der jeweiligen Orientierbarkeit des physikalischen Universums ab. Die Mathematik zeigt die Möglichkeiten, die Physik untersucht anschließend, welche davon tatsächlich realisiert ist.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Unsere Konstruktion zu Satz M4P beginnt mit einer Mannigfaltigkeit M und nutzt einen Atlas $\mathscr{A}$ als zusätzliches Datum. Wir konstruieren so aus $(M, \mathscr{A})$ eine orientierte Mannigfaltigkeit $(\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}})$ zusammen mit der zweiblättrigen Überlagerung $p : (\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}}) \to (M, \mathscr{A})$.

Aufgabe: Angenommen, die Mannigfaltigkeit $(M, \mathscr{A})$ ist $\mathscr{C}^k$–glatt. Gilt dies dann auch für die überlagernde Mannigfaltigkeit $(\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}})$? und die Abbildung $p : (\tilde{M}, \tilde{\mathscr{A}}) \to (M, \mathscr{A})$?

Lösung: Glattheit eines Atlas $\tilde{\mathscr{A}}$ ist eine Eigenschaft der Kartenwechsel. In unserem Fall sind die Karten in $\tilde{\mathscr{A}}$ lokal „dieselben“ wie in $\mathscr{A}$, wobei je nach Orientierungsverhalten jedes Kartengebiet verdoppelt wird. Die Kartenwechsel in $\tilde{\mathscr{A}}$ sind ebenfalls „dieselben“ wie in $\mathscr{A}$, eventuell auf kleineren Überlappungen. Alle Eigenschaften der Kartenwechsel in $\mathscr{A}$ übertragen sich somit unmittelbar auf die Kartenwechsel in $\tilde{\mathscr{A}}$.

Orientierungsüberlagerung einer Mannigfaltigkeit

Ist das Produkt $M \times N$ zweier nicht-orientierbarer Mannigfaltigkeiten auf wundersame Weise orientierbar? Nein, niemals! Genauer gilt:

Korollar M4s: Orientierbarkeit eines Produts

Für das Produkt zusammenhängender Mannigfaltigkeiten M und N gilt

$$\pi_1(M \times N, (a,b)) \cong \pi_1(M,a) \times \pi_1(N,b) \quad \text{wie in L2o und}$$
$$\operatorname{sign}_{M\times N}([\gamma]) = \operatorname{sign}_M([\mathrm{pr}_M \circ \gamma]) \cdot \operatorname{sign}_N([\mathrm{pr}_N \circ \gamma]).$$

Genau dann ist $M \times N$ orientierbar, wenn M und N orientierbar sind.

Beweis: Rechnen Sie dies sorgsam nach als Übung / Wiederholung (K1w).

Was sagt die Galois–Korrespondenz?

Wir erinnern zunächst an unser zentrales Beispiel und bewundern die verblüffende Dualität von Fundamentalgruppe und Überlagerungen:

Beispiel: Für die Kreislinie haben wir den Isomorphismus

$$\deg : (\pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \cdot) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}, +).$$

Ich schreibe kurz $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $U \leq \mathbb{Z}$ ist von der Form $U = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \geq 1$ haben wir die Überlagerung

$$p_n : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1) : z \mapsto z^n \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im}(p_n)_\sharp = n\mathbb{Z}.$$

Im Sonderfall $n = 0$ haben wir die universelle Überlagerung

$$p_0 : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{S}^1, 1) : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im}(p_0)_\sharp = 0\mathbb{Z}.$$

☺ Das gilt für jeden (vernünftigen) Raum: Zusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0) entsprechen Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.

Was sagt die Galois–Korrespondenz?

Satz M5A: Galois–Korrespondenz

Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend.

(1) Jede Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus $p_\sharp : \pi_1(Y, y_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ und somit eine charakteristische Untergruppe $\operatorname{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$.

(2) Zu jeder beliebigen Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$ existiert genau eine zusammenhängende Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $\operatorname{Im}(p_\sharp) = H$. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie.

Die topologische Voraussetzung, dass X lokal einfach zusammenhängend sei, ist recht milde: Mannigfaltigkeiten und Simplizialkomplexe erfüllen sie automatisch. Lokale Vorsichtsmaßnahmen sind leider tatsächlich notwendig, wir werden sie später noch wesentlich abschwächen (M5Q).

Ich wähle hier zunächst eine möglichst bequeme Formulierung.
Wir werden dies zunächst an Simplizialkomplexe explizieren.

Galois–Korrespondenz als Klassifikation

☺ Die Galois–Korrespondenz bietet eine elegante *Klassifikation* aller zusammenhängender Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$: Wir haben genau eine für jede Untergruppe $H \leq \pi_1(X, x_0)$. Die Galois–Überlagerungen sind darunter leicht zu erkennen:

Satz M5A: Galois–Korrespondenz

(3) Genau dann ist die Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ galoisch, wenn die charakteristische Untergruppe $\mathrm{Im}(p_\sharp) \leq \pi_1(X, x_0)$ normal ist.

In diesem Fall operiert die Quotientengruppe $G = \mathrm{Im}(p_\sharp) \backslash \pi_1(X, x_0)$ auf Y und ergibt die Galois–Überlagerung $G \curvearrowright (Y, y_0) \to (X, x_0)$.

Beispiel: Mit unsere obigen Liste $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kennen wir (bis auf Isomorphie) bereits alle zusammenhängenden Überlagerungen $(\tilde{X}, x_0) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ der Kreislinie. Das ist anschaulich plausibel, bedarf jedoch eines Beweises, denn unsere Intuition beruht oft nur auf Mangel an Phantasie.

Galois–Korrespondenz als Übersetzung

☺ Die Galois–Korrespondenz bietet eine verlustfreie *Übersetzung*: Wer Überlagerungen versteht, versteht Untergruppen, und umgekehrt. Das macht die Galois–Korrespondenz zu einem starken Werkzeug.

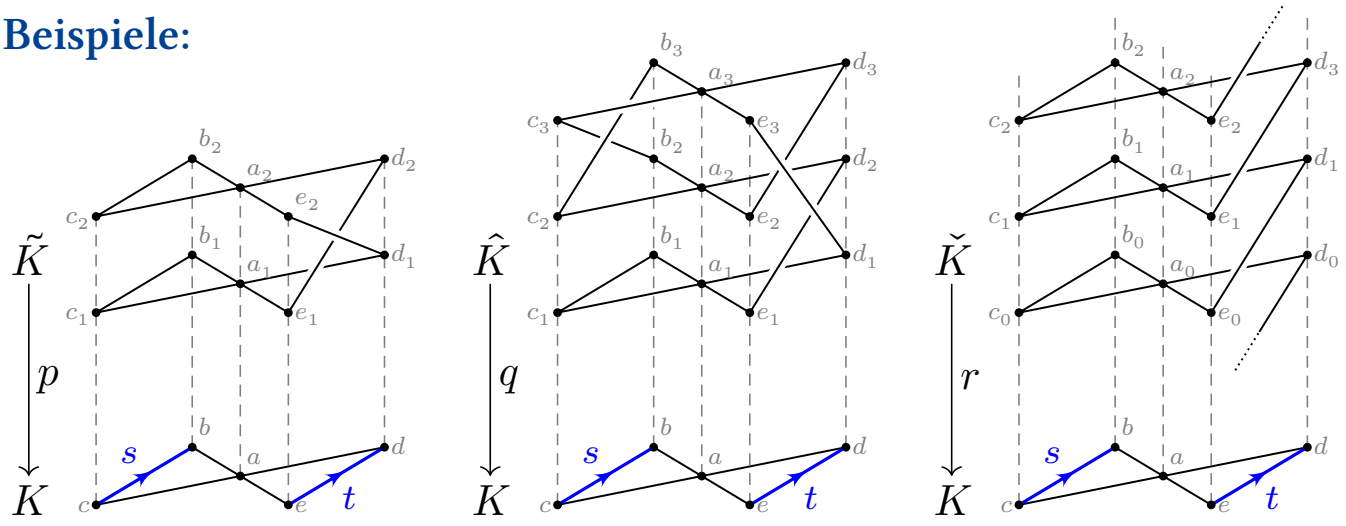
Zunächst sind Gruppen und Überlagerungen zwei sehr verschiedene Konzepte. Ihre Korrespondenz ist überaus bemerkenswert. So können wir zwischen beiden Sichtweisen wechseln, unsere Frage jeweils übersetzen und so einen möglichst leichten Weg zur Antwort finden.

Beispiel: Jeder Graph K hat eine freie Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0)$. Umgekehrt ist jede freie Gruppe F isomorph zur Fundamentalgruppe eines geeigneten Graphen. Wie sehen also Untergruppen $G \leq F$ aus? Der Satz von Nielsen–Schreier (M5D) besagt, dass auch G frei ist. Wie sieht man das? Am besten mit der Galois–Korrespondenz!

Dazu benötigen wir zunächst nur die Galois–Korrespondenz für Graphen, und diese konstruiere ich als erstes. Simplizialkomplexe gelingen dann ebenso. Anschließend lösen wir den allgemeinen Fall.

Galois–Korrespondenz für Graphen

Beispiele:



Daten: Sei K ein zusammenhängender Graph, $T \subseteq K$ ein Spannbaum und $x_0 \in \Omega$ eine Ecke. Gemäß L6D ist die Fundamentalgruppe frei:

$$\pi_1(K, x_0) \xrightarrow{\sim} G = \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \setminus T \,\big|\, s_{ab}s_{ba} = 1 : \{a,b\} \in K \setminus T \,\big].$$
$$\cong \big[\, s_{ab} : \{a,b\} \in K \,\big|\, s_{ab} = 1 : \{a,b\} \in T,\ s_{ab}s_{ba} = 1 : \{a,b\} \in K \,\big].$$

Sei $F \neq \emptyset$ eine Menge und $F \overset{\varphi}{\curvearrowleft} \pi_1(K, x_0) : (u, g) \mapsto u \cdot g$ eine Operation; für jede Kante $\{a,b\} \in K$ ist $u \mapsto u \cdot s_{ab}$ eine Permutation der Menge F.

Galois–Korrespondenz für Graphen

Satz M5B: Überlagerung aus Monodromie

Die Daten (K, F, φ) definieren die Eckenmenge $\tilde{\Omega} = F \times \Omega$ und darauf

$$\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K := \big\{\, \{(u,a),(u',b)\} \subseteq \tilde{\Omega} \,\big|\, \{a,b\} \in K,\ u' = u \cdot s_{ab} \,\big\}.$$

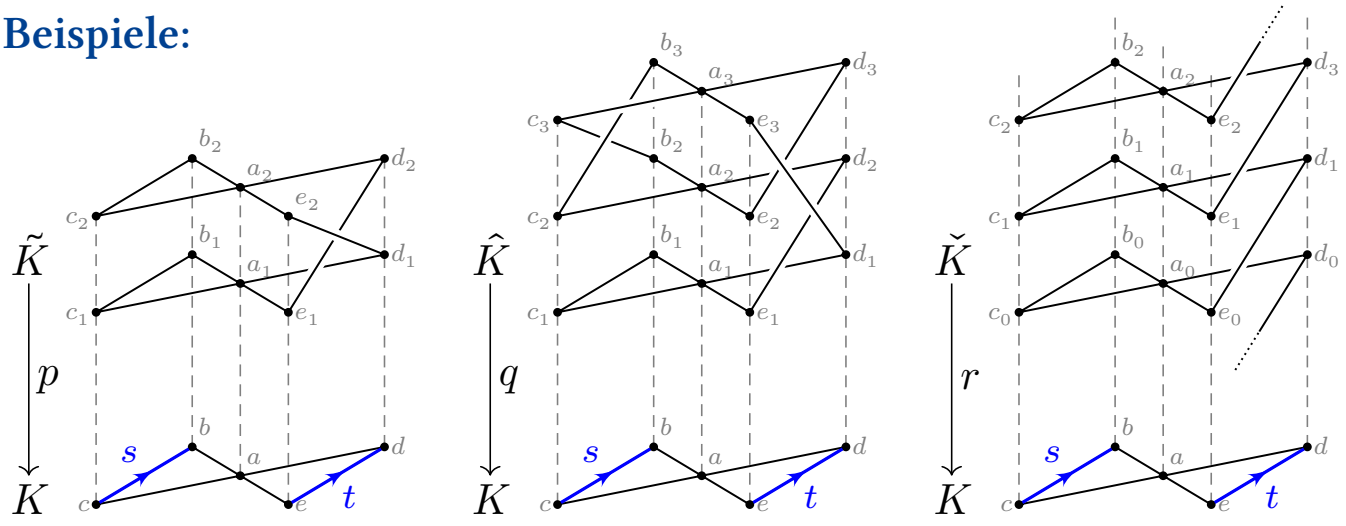
Dies ist ein Graph, und die Projektion $p : \tilde{K} \to K : (u,a) \mapsto a$ ist eine simpliziale Überlagerung (M1K) mit Faser F und Monodromie φ.

Beweis: Zu jeder Ecke $a \in \Omega$ wird der Stern $\mathrm{St}(a, K) := \langle \{a,b\} \in K \rangle$ trivial überlagert durch $\mathrm{St}((u,a), \tilde{K}) = \langle \{(u,a),(u',b)\} \in \tilde{K} \rangle$ mit $u \in F$. Für $u \neq v$ in F gilt $\mathrm{St}((u,a), \tilde{K}) \cap \mathrm{St}((v,a), \tilde{K}) = \emptyset$: Läge $(u',b) = (v',b)$ im Schnitt, so wäre $u \cdot s_{ab} = u' = v' = v \cdot s_{ab}$, also $u = v$. QED

☺ In dem Graphen $\tilde{K}$ betrachten wir $F \times T$ anschaulich als die Etagen. Die Monodromie codiert die Etagenwechsel effizient als Permutationen. Allgemeiner als das kartesische Produkt $F \times K$ konstruieren wir damit $F \overset{\varphi}{\rtimes} K$ getwistet durch die gewünschte Monodromie, vergleiche M029.

Galois–Korrespondenz für Graphen

Beispiele:



Faser $F = \{1, 2\}$ mit Monodromie $F_s = \mathrm{id}$ und $F_t = (1, 2) \longleftrightarrow p : \tilde{K} \to K$.
Faser $F = \{1, 2, 3\}$, Monodromie $F_s = (2, 3)$, $F_t = (1, 2, 3) \longleftrightarrow q : \hat{K} \to K$.
Faser $F = \mathbb{Z}$, Monodromie $F_s = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ und $F_t : k \mapsto k + 1 \quad \longleftrightarrow \quad r : \check{K} \to K$.

Jede Überlagerung bestimmt ihre Monodromie. Neu ist die Umkehrung: Aus der Monodromie (K, F, φ) erhalten wir nun $p : \tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K \to K$. Die obige Graphik illustriert dies; Indizes in F entsprechen Etagen.

Galois–Korrespondenz für Graphen

☺ Damit erhalten wir die Galois–Korrespondenz M5A für Graphen:

Korollar M5c: Überlagerung aus Untergruppe

Sei K ein zshgder Graph und $H \leq G = \pi_1(K, x_0)$ eine Untergruppe. Auf der Quotientenmenge $F = H\backslash G$ operiert G durch Multiplikation

$$\varphi : F \times G \to F : (Ha, g) \mapsto Hag.$$

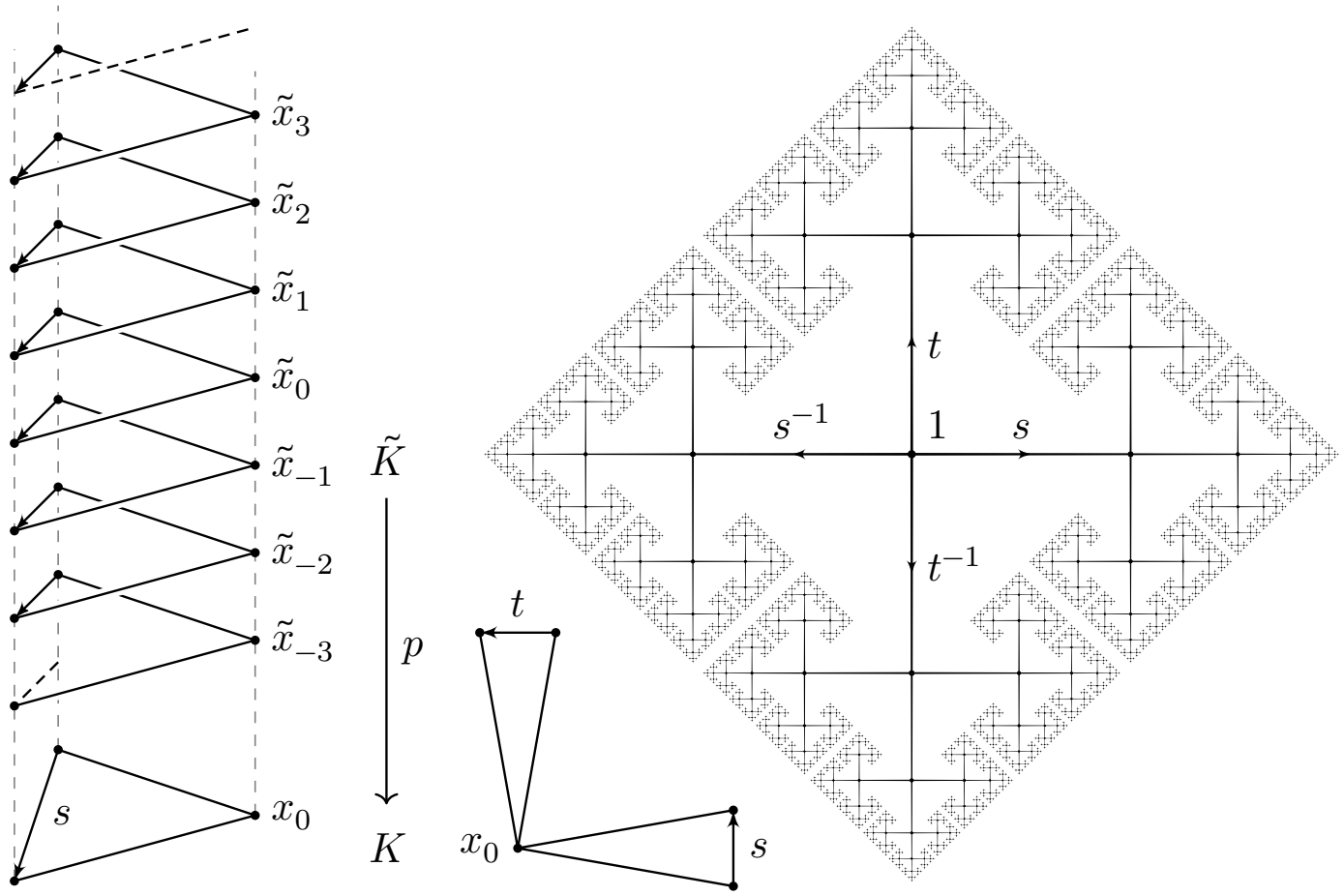
Der Graph $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K$ ist zusammenhängend, da G transitiv operiert. Die Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (H\,1, x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(K, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$. Ist $H \trianglelefteq G$ normal, so ist $F = H\backslash G$ eine Gruppe, und wir erhalten die Galois–Überlagerung

$$H\backslash G \curvearrowright (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (K, x_0).$$

Speziell für $H = \{1\}$ erhalten wir eine universelle Überlagerung.

Aufgabe: Diese Aussagen sind klar nach Konstruktion. Falls (noch) nicht, rechnen Sie es nach! Falls Sie Hilfe brauchen, siehe M5G.

Beispiele für universelle Überlagerungen



Beispiele für universelle Überlagerungen

Die linke Graphik zeigt ein Dreieck K mit $\pi_1(K, x_0) = \langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$ und darüber seine universelle Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$. In dem Graphen $\tilde{K}$ betrachten wir $\mathbb{Z} \times T$ anschaulich als Etagen, die Monodromie $F_s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : k \mapsto k + 1$ codiert die Etagenwechsel.

Die rechte Graphik zeigt einen Graphen K mit $\pi_1(K, x_0) = \langle s, t \mid - \rangle$ und darüber seine universelle Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$. Hier ist eine Darstellung in Etagen nicht so übersichtlich möglich.

Jede Ecke von $\tilde{K}$ ist ein Gruppenelement $g \in \langle s, t \mid - \rangle$. Jede Kante nach rechts/links entspricht einer Rechtsmultiplikation mit $s^{\pm 1}$, und jede Kante nach oben/unten entspricht einer Rechtsmultiplikation mit $t^{\pm 1}$. (Damit dies alles simplizial möglich ist, müssen wir jede Kante dreiteilen.)

Zur graphischen Darstellung habe ich zudem die Kanten um den Faktor $(0.49)^k$ verkürzt, wobei k den Abstand zur Wurzel zählt. So entsteht ein ästhetisch ansprechendes, fraktales Bild des Graphen $\tilde{K}$. Die Abbildung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ ist dann klar, aber hier nicht gezeichnet.

Nielsen–Schreier: Freiheit für alle Untergruppen!

Als erste schöne Anwendung erhalten wir:

Eine Gruppe ist genau dann frei,
wenn jede ihrer Untergruppen frei ist.

Das ist hier keine politische, sondern eine mathematische Aussage:

Satz M5D: Nielsen 1921, Schreier 1927

(1) In einer freien Gruppe F ist jede Untergruppe $G \leq F$ frei.

(2) Bei endlichem Index $[F : G] < \infty$ gilt zudem die Rang–Index–Formel:

$$[\operatorname{rang}(G) - 1] = [\operatorname{rang}(F) - 1] \cdot [F : G]$$

Beispiel: Im Falle $\operatorname{rang}(F) = 1$ haben wir $F \cong \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $G \leq \mathbb{Z}$ ist von der Form $G = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und somit frei: entweder vom Rang 1 bei endlichem Index $n \geq 1$, oder vom Rang 0 bei unendlichem Index. (Die Formel „$-1 = 0 \cdot \infty$“ wird dann offensichtlich unsinnig.)

Aufgabe: Fügen Sie die vorbereiteten Konstruktionen zu einem Beweis. Bewundern Sie Eleganz und Effizienz der Galois–Korrespondenz!

Nielsen–Schreier: Freiheit für alle Untergruppen!

Beweis: (1) Zu $F = \langle S \mid - \rangle$ konstruieren wir einen zshgden Graphen K mit $\pi_1(K, x_0) = F$ (L6D). Zur Untergruppe $G \leq F$ existiert eine zshgde Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} G \leq F$ (M5C). Auch $\tilde{K}$ ist ein Graph. Daher ist $\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$ frei (L6D) und somit auch G.

(2) Ist $\operatorname{rang}(F) = |S|$ endlich, so wählen wir den Graphen K endlich. Dank L6D gilt $\chi(K) = 1 - \operatorname{rang}(F)$. Die Blätterzahl der Überlagerung p ist der Index $n = [F : G]$ dank M5C. Sind der Graph K und die Blätterzahl n endlich, so auch der überlagernde Graph $\tilde{K}$, und $\chi(\tilde{K}) = n\,\chi(K)$. $\boxed{\text{QED}}$

📖 Otto Schreier (1901–1929) habilitierte sich 1926 bei Emil Artin: *Die Untergruppen der freien Gruppe.* Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927) 161–183. Schon die allgemeine Garantie der Freiheit (1) ist beachtlich. Dank (2) gewinnen wir die quantitative Präzisierung des Rangs.

Den Beweis kann man rein algebraisch führen, er endet dann aber leicht in heilloser Rechnerei. Wir können den Beweis hier topologisch führen, indem wir freie Gruppen darstellen als Fundamentalgruppen von Graphen – und alles löst sich in Wohlgefallen auf. Zweisprachigkeit!

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

Daten: Sei K ein zusammenhängender Simplizialkomplex, $T \subseteq K$ ein Spannbaum und $x_0 \in \Omega$ eine Ecke. Gemäß L6I gilt $\pi_1(K, x_0) = [\,S \,|\, R\,]$,

$$S = \{\, s_{ab} \,|\, \{a,b\} \in K \} \qquad \text{als Erzeuger mit den Relationen}$$
$$R = \{\, s_{ab} \,|\, \{a,b\} \in T \} \cup \{\, s_{ab} s_{ba} \,|\, \{a,b\} \in K \} \cup \{\, s_{ab} s_{bc} s_{ca} \,|\, \{a,b,c\} \in K \}.$$

Im Falle $\dim K = 1$ ist K ein Graph, und wir erhalten die obige Situation. Auch die folgende Konstruktion übertragen wir nahezu wörtlich aus der Diskussion von Graphen, alles bleibt wunderbar einfach und elegant.

Sei $F \neq \emptyset$ eine Menge und $F \overset{\varphi}{\curvearrowleft} \pi_1(K, x_0) : (u, g) \mapsto u \cdot g$ eine Operation; für jede Kante $\{a,b\} \in K$ ist $u \mapsto u \cdot s_{ab}$ eine Permutation der Menge F, mit inverser Permutation $u \mapsto u \cdot s_{ba}$. Jede Spannbaumkante $\{a,b\} \in T$ operiert trivial. Für jedes Dreieck $\{a,b,c\} \in K$ gilt $u \cdot s_{ab} \cdot s_{bc} \cdot s_{ca} = u$.

☺ Hier zahlt sich aus, dass wir alles explizit und präzise formulieren: Von der Präsentation der Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0) = [\,S \,|\, R\,]$ bis zur Konstruktion der Überlagerung $p : \tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K \to K$. *Explicit is beautiful!*

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

Satz M5F: Überlagerung aus Monodromie

Die Daten (K, F, φ) definieren die Eckenmenge $\tilde{\Omega} = F \times \Omega$ und darauf

$$\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K := \{\, \{(u_0, a_0), \dots, (u_n, a_n)\} \,|\, \{a_0, \dots, a_n\} \in K,\ u_j = u_i \cdot s_{a_i a_j} \}.$$

Dies ist ein Simplizialkomplex, und die Projektion $p : \tilde{K} \to K : (u, a) \mapsto a$ ist eine simpliziale Überlagerung mit Faser F und Monodromie φ.

Beweis: Mit K ist auch $\tilde{K}$ ein Simplizialkomplex (I2A): $\tilde{K}$ ist ein System endlicher Mengen und abgeschlossen unter Bildung von Teilmengen.

Die Projektion p ist eine simpliziale Überlagerung (M1K): Zu jeder Ecke $a \in \Omega$ wird der Stern $\mathrm{St}(a, K)$ trivial überlagert durch die Eckensterne $\mathrm{St}((u, a), \tilde{K})$, siehe M5B. Die Faser über x_0 ist $p^{-1}(x_0) = F \times \{x_0\} \cong F$. Nach Konstruktion operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(K, x_0) = [\,S \,|\, R\,]$ hierauf durch die vorgegebene Monodromie φ. QED

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

☺ Damit erhalten wir die Galois–Korrespondenz M5A für SKomplexe:

Korollar M5G: Überlagerung aus Untergruppe

Sei K ein zshgder SKomplex und $H \leq G = \pi_1(K, x_0)$ eine Untergruppe. Auf der Quotientenmenge $F = H\backslash G$ operiert G durch Multiplikation

$$\varphi : F \times G \to F : (Ha, g) \mapsto Hag.$$

Der SKomplex $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K$ ist zusammenhängend, da G transitiv operiert. Die Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 = (H\,1, x_0)$ induziert $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(K, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$. Ist $H \trianglelefteq G$ normal, so ist $F = H\backslash G$ eine Gruppe, und wir erhalten die Galois–Überlagerung

$$H\backslash G \curvearrowright (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (K, x_0).$$

Speziell für $H = \{1\}$ erhalten wir eine universelle Überlagerung.

Aufgabe: Diese Aussagen sind klar nach Konstruktion. Falls (noch) nicht, rechnen Sie es nach! Falls Sie Hilfe brauchen, führe ich es für Sie aus.

Galois–Korrespondenz für Simplizialkomplexe

Beweis: Wir setzen den zugrundeliegenden Simplizialkomplex K als zusammenhängend voraus, um die Existenz eines Spannbaumes $T \subseteq K$ zu sichern (Satz I3J). Jede Etage von $F \times T$ ist somit zusammenhängend. Da die Gruppe G zudem transitiv auf F operiert, erreichen wir jede Etage durch die Operation der verbleibenden Kanten $\{a, b\} \in K \setminus T$.

Sei $w = a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ ein geschlossener Kantenpfad in (K, x_0). Das zugehörige Gruppenelement ist $[w] = s_{a_0 a_1} s_{a_1 a_2} \cdots s_{a_{n-1} a_n} \in G$. Der nach $(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$ hochgehobene Kantenpfad $\tilde{w} = \tilde{a}_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_{n-1} \tilde{a}_n$ läuft vom Start $\tilde{a}_0 = \tilde{x}_0$ zum Ziel $\tilde{a}_n = \tilde{x}_0 \cdot [w]$. Dieser ist genau dann geschlossen, wenn $[w] \in H$ gilt. Hieraus folgt $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$.

Für $H \trianglelefteq G$ ist $F = H\backslash G$ eine Gruppe. Die Linksmultiplikation $F \curvearrowright F$ stiftet die simpliziale Galois–Überlagerung $F \curvearrowright (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{p} (K, x_0)$.

Speziell für $H = \{1\}$ ist der so konstruierte Komplex $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K$ einfach zusammenhängend, dank $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} H \leq \pi_1(K, x_0)$. Somit ist p eine universelle Überlagerung (im Sinne von M3J). QED

Anwendung auf Flächengruppen

Zu Graphen K gehören die freien Gruppen $\pi_1(K, x_0) \cong \langle S \mid - \rangle$.
Zu geschlossenen Flächen $F_g^\pm$ gehören die Flächengruppen

$$\begin{aligned} \pi_1(F_g^+, x_0) &\cong G_g^+ := \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle, \\ \pi_1(F_g^-, x_0) &\cong G_g^- := \langle c_0, c_1, \dots, c_g \mid c_0 c_0 c_1 c_1 \cdots c_g c_g = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Analog zum Satz M5D von Nielsen–Schreier für freie Gruppen gilt hier:

Satz M5K: Flächengruppen

Jede Untergruppe $U \leq G_g^+$ von endlichem Index n ist selbst isomorph zu einer Flächengruppe, $U \cong G_h^+$. Genauer gilt dabei $1 - h = n(1 - g)$.

Beispiel: Für den Torus $F_1^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gilt $G_1^+ \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $U \leq G_1^+$ von Index $n \in \mathbb{N}$ ist von der Form $U = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$ mit $u, v \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und $\det(u, v) = n$, also $U \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong G_1^+$, wie vom Satz vorhergesagt.

Für $g \geq 2$ versagen die kommutativen Werkzeuge der Linearen Algebra, doch Fundamentalgruppen und Überlagerungen helfen uns wunderbar!

Anwendung auf Flächengruppen

Die Gruppe $G_g^\pm$ ist explizit präsentiert, zudem sehr übersichtlich mit nur einer Relation. Damit ist die Gruppe zwar eindeutig festgelegt, doch viele Fragen bleiben noch offen, etwa mögliche Untergruppen.

☺ Der Beweis ist erfreulich leicht und folgt erneut dem obigen Credo: Wer Überlagerungen versteht, versteht Untergruppen, und umgekehrt. Das macht die Galois–Korrespondenz zu einem starken Werkzeug. Wir adaptieren unseren Beweis des Satzes von Nielsen–Schreier:

Beweis: Zur Gruppe G_g^+ haben wir eine simpliziale Fläche K, $|K| \cong F_g^+$, mit $\pi_1(K, x_0) = G_g^+$. Zur Untergruppe U existiert dank M5G eine zshgde Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $p_\sharp : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\sim} U \leq G_g^+$.

Auch $\tilde{K}$ ist eine zusammenhängende orientierbare geschlossene simpliziale Fläche. Dank Flächenklassikation (K3G) gilt $|\tilde{K}| \cong F_h^+$ für ein $h \in \mathbb{N}$ und somit $U \cong G_h^+$. Für die Euler–Charakteristik gilt $2 - 2h = \chi(\tilde{K}) = n\chi(K) = n(2 - 2g)$, also $1 - h = n(1 - g)$. QED

Anwendung auf Flächengruppen

☺ Als Dreingabe erhalten wir erneut die quantitative Präzisierung. Diese nutzen wir sogleich im folgenden beruhigenden Korollar.

Korollar M5L: Flächengruppen

Von allen Flächengruppen $G_g^\pm$ mit $g \in \mathbb{N}$ ist nur $G_0^+ = \{1\}$ frei.

Für $r \geq 1$ Randkomponenten ist jede der Gruppen $\pi_1(F_{g,r}^\pm, x_0)$ frei (L6H).

Unsere Präsentation von $G_g^\pm$ folgt bequem aus der Flächenklassifikation und hat nur eine Relation. Das schließt keineswegs aus, dass $G_g^\pm$ frei ist, denn eventuell ist eine weitere Präsentation ohne Relationen möglich. Als warnende Illustration betrachte man $\langle a, b \mid a = b \rangle \cong \langle a \mid - \rangle$:

Um zu zeigen, dass eine Gruppe frei ist, genügt es, eine Basis anzugeben. Um zu zeigen, dass sie nicht frei ist, müssen wir eine Hindernis angeben, also eine Eigenschaft der Gruppe, die ihrer Freiheit im Wege steht.

Beweis: Die Abelschmachung zeigt, dass die Flächengruppe G_g^- mit $g \in \mathbb{N}$ nicht frei ist, denn $(G_g^-)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^g$ hat Torsion.

Anwendung auf Flächengruppen

Angenommen, eine der Flächengruppen $G = G_g^+$ mit $g \geq 1$ wäre frei. Wegen $G_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ hat G dann den Rang $2g \geq 2$. Demnach existieren Untergruppen $U \leq G$ zu jedem Index $n \geq 2$ (M5E). Nach Nielsen–Schreier M5D ist U frei vom Rang $r = 1 - n(1-2g)$, also $U_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^r$. Nach M5K gilt jedoch ebenso $U \cong G_h^+$ mit $h = 1 - n(1-g)$ und somit $U_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2h}$. Die Gleichung $1 - n(1-2g) = 2 - 2n(1-g)$ gilt nur für $n = 1$. QED

☺ Unser topologischer Beweis ist trickreich. Warum ist er so leicht? Weil wir für Graphen und Flächen starke topologische Techniken haben! In seiner Gesamtheit ist dieser Beweis keineswegs kurz: Wie benötigen die Flächenklassifikation, Fundamentalgruppen und Überlagerungen. Wieder einmal jauchzen wir: Der Weg ist lang, doch lohnend!

Aufgabe: Zeigen Sie das Korollar mit $\sharp\,\mathrm{Hom}(G_g^+, \mathrm{S}_3) < 6^{2g}$. **Lösung:** Wäre G_g^+ frei, so vom Rang $2g$, also $\sharp\,\mathrm{Hom}(G_g^+, \mathrm{S}_3) = 6^{2g}$ dank UAE. Für einige der Zuordnungen $\{a_1, \dots, b_g\} \to \mathrm{S}_3$ ist jedoch die Relation $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$ nicht erfüllt. Also gilt $\sharp\,\mathrm{Hom}(G_g^+, \mathrm{S}_3) < 6^{2g}$.

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Gruppenpräsentationen $G = \langle S \,|\, R \rangle$ durch Erzeuger S und Relationen R sind der zentrale Gegenstand der kombinatorischen Gruppentheorie. Zu einer Untergruppe $H \leq G$ möchte man dann eine Präsentation $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$ ableiten. Das folgende Verfahren löst dies sehr elegant:

Satz M5H: Reidemeister 1926, Schreier 1927

Sei $H \leq G$ eine Untergruppe von endlichem Index $n = |G : H| < \infty$. Ist G endlich erzeugt bzw. endlich präsentiert, so auch H. Quantitativ:
(a) Zu $G = \langle S \rangle$ existiert $S' \subseteq G$ mit $H = \langle S' \rangle$ und $|S'| - 1 = n(|S| - 1)$.
(b) Zu $G = \langle S \,|\, R \rangle$ existiert $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$ zudem mit $|R'| = n|R|$.

Bemerkung: Der Satz M5D von Nielsen–Schreier impliziert (a). Umgekehrt impliziert (b) Nielsen–Schreier: Aus $R = \emptyset$ folgt $R' = \emptyset$.

📖 B. Chandler, W. Magnus: *The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas.* Springer 1982 (Chapter II.3)

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Beweis: Gegeben sei die Präsentation $G = \langle S \,|\, R \rangle$. Die freie Gruppe $\langle S \,|\, - \rangle \cong \pi_1(K_1, x_0)$ ist Fundamentalgruppe eines Graphen K_1 (L6D). Wir erhalten $\langle S \,|\, R \rangle \cong \pi_1(K, x_0)$ durch Anheften einer 2–Zelle für jede Relation (L6S). Dank Galois–Korrespondenz M5G entspricht $H \leq G$ einer Überlagerung $p : (\tilde{K}, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ mit $\mathrm{Im}(p_\sharp) = H$ und Faser $H \backslash G$.

Der SKomplex $\tilde{K}$ entsteht aus der Überlagerung $p : (\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) \to (K_1, x_0)$ durch Anheften derselben 2–Zellen, jeweils hochgehoben auf jede Etage. Die Gruppe $\pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) = \langle S' \,|\, - \rangle$ ist frei und liefert die gewünschten Erzeuger dank $\pi_1(\mathrm{inc}) : \pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_0) = \langle S' \,|\, - \rangle \twoheadrightarrow \langle S' \,|\, R' \rangle = \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0)$.

(a) Im endlichen Fall gilt $\chi(K_1) = 1 - |S|$ und $1 - |S'| = \chi(\tilde{K}_1) = n\chi(K_1)$.

(b) Die hochgehobenen 2–Zellen von $\tilde{K}$ entsprechen den Relationen R' einer Gruppenpräsentation $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$. Dabei gilt $R' \cong (H \backslash G) \times R$; speziell im endlichen Fall erhalten wir also $|R'| = n|R|$. $\boxed{\text{QED}}$

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Bemerkung: Bei unendlichem Index gilt die Endlichkeitsaussage (a) i.A. nicht mehr: Die freie Gruppe $F = \langle s, t \mid - \rangle$ vom Rang 2 enthält die freie Untergruppe $G = \langle t^k s t^{-k} : k \in \mathbb{Z} \mid - \rangle$ von unendlichem Rang und Index.

Aussage (2) jedoch in der Form $R' \cong (H \backslash G) \times R$ gilt allgemein weiterhin. Insbesondere folgt aus $R = \emptyset$ immer $R' = \emptyset$. Das ist erneut der Satz von Nielsen–Schreier mit obigem Beweis durch Überlagerung von Graphen!

Bemerkung: Diese topologisch-simpliziale Konstruktion können wir nun algebraisch-kombinatorisch formalisieren: Wir erhalten hieraus den *Reidemeister–Schreier–Algorithmus*. Seine händische Ausführung ist in jedem Einzelfall klar, doch seine allgemeine Formulierung ist mühsam. Ich empfehle daher nachdrücklich die geometrische Veranschaulichung!

Die algebraische Formalisierung als Algorithmus, *ready to code*, ist dann eine interessante Übung in Geduld und Sorgfalt.

Der Reidemeister–Schreier–Algorithmus

Algorithmisch interessant ist das Reidemeister–Schreier–Verfahren vor allem für endliche Präsentationen $G = \langle S \mid R \rangle$ und Untergruppen $H \leq G$ von endlichem Index. Es liefert zwar endliche Präsentationen, doch diese sind im Allgemeinen groß und unhandlich. Für praktische Zwecke wird man versuchen, sie anschließend möglichst weit zu vereinfachen, durch geeignete Tietze–Transformationen (L3s). Computer-Algebra-Systeme zur kombinatorischen Gruppentheorie implementieren genau dies.

Bequem nutzbar, effizient implementiert und gründlich getestet finden Sie dies zum Beispiel in GAP, `https://docs.gap-system.org/doc/ref/chap48`. Dort finden Sie auch praktische Beispiele. Wenn Sie möchten, können Sie damit experimentieren und einige kleine Beispiele per Hand prüfen.

Beispiel: Wiederholen Sie die Coxeter–Präsentation der symmetrischen Gruppe S_n. Folgern Sie eine Präsentation der alternierenden Gruppe A_n. Die folgende Ausführung gibt hierzu eine detaillierte Anleitung.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$

Das leuchtende Beispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$ führt zu folgender Sichtweise:

Beispiel: Vorgelegt sei die Präsentation $G = \langle S \,|\, R \rangle$. Zu jeder Relation $r = s_1^{e_1} \cdots s_\ell^{e_\ell} \in R$ sei $\varepsilon(r) := e_1 + \cdots + e_\ell \in \mathbb{Z}$ die Exponentensumme. Daraus berechnen wir den größten gemeinsamen Teiler

$$n := \mathrm{ggT}\{\, \varepsilon(r) \,|\, r \in R \,\} \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten den Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\alpha(s) = 1$ für alle $s \in S$. Sein Kern $H := \mathrm{Ker}(\alpha) \trianglelefteq G$ hat demnach Index n. (Im Falle $n = 0$ haben wir $\alpha : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ und der Index von H in G ist ∞.)

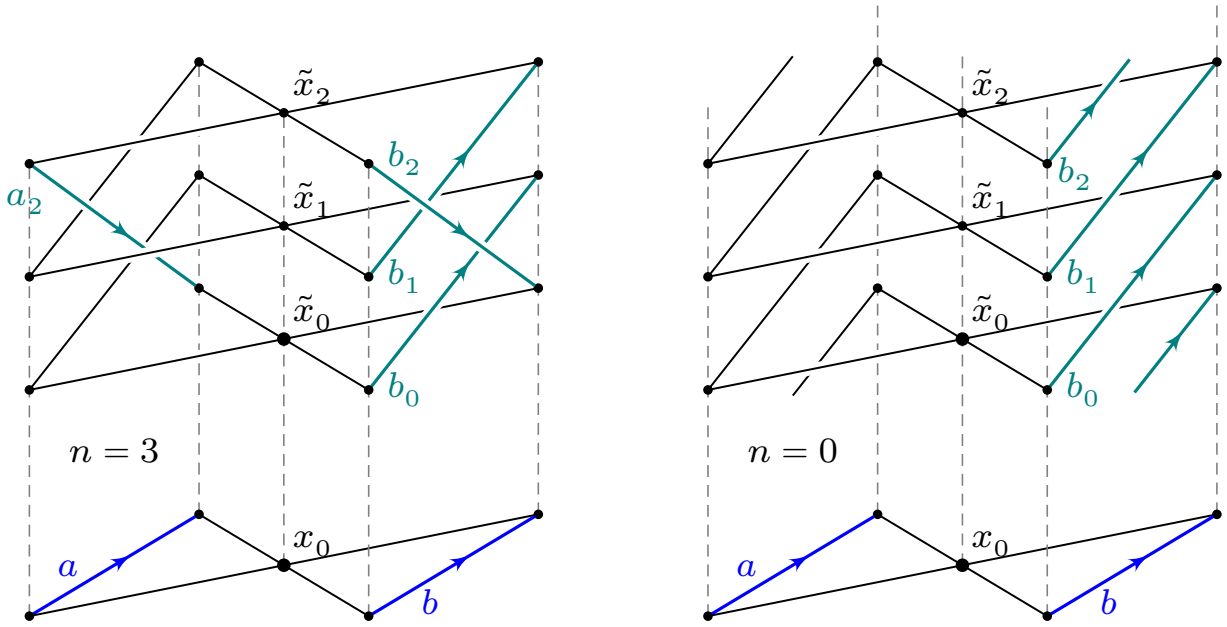
Beispiel: Für die Coxeter–Präsentation L3w der symmetrischen S_n erhalten wir die Abelschmachung $\alpha = \mathrm{sign}$ und $H = \mathrm{A}_n$, siehe L373.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{S}_n & \cong & P_n := \left\langle t_1, \ldots, t_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{rl} t_i^2 = 1 & \text{für alle } i \\ t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle \\ \tau_i & \leftarrow\!\shortmid & t_i \end{array}$$

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$

Aufgabe: Bestimmen Sie aus $G = \langle S \,|\, R \rangle$ eine Präsentation $H = \langle S' \,|\, R' \rangle$.
Hinweis: Das Reidemeister–Schreier–Verfahren liefert das Gewünschte!

Lösung: Hier ist ein typischer Graph $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K$ zu $H = \mathrm{Ker}(\alpha) \trianglelefteq G$.



Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n$

(1) Aus den Erzeugern $S = \{a, b, c, \dots\}$ für G erhalten wir Erzeuger für H dank Reidemeister–Schreier M5H. Für $n = 0$ finden wir die Erzeuger

$$b_k \mapsto a^k b a^{-k-1},\ c_k \mapsto a^k c a^{-k-1},\ \dots \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Im endlichen Falle $n \geq 1$ finden wir die Erzeuger $a_{n-1} \mapsto a^n$ und

$$b_0 \mapsto ba^{-1},\ b_1 \mapsto aba^{-2},\ \dots,\ b_{n-2} \mapsto a^{n-2}ba^{-n+1},\ b_{n-1} \mapsto a^{n-1}b,$$
$$c_0 \mapsto ca^{-1},\ c_1 \mapsto aca^{-2},\ \dots,\ c_{n-2} \mapsto a^{n-2}ca^{-n+1},\ c_{n-1} \mapsto a^{n-1}c,\ \dots.$$

Alternativ $a_{n-1} \mapsto a^n,\ b_k \mapsto a^k b a^{-k-1},\ c_k \mapsto a^k c a^{-k-1},\ \dots$ mit $k \in \mathbb{Z}_n$. Hier ist zusammenfassend $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ für $n \geq 1$ und $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$. Im Falle $n = 0$ gilt $a_{n-1} \mapsto a^n = 1$, und diesen Erzeuger löschen wir.

(2) Jede Relation $r \in R$ heben wir zu einem Wort $\tilde{r}$ in $a_{n-1}, b_k, c_k, \dots$ gemäß M407. Seine Hochhebungen sind $\tilde{r}_k = a^k \tilde{r} a^{-k}$ für $k \in \mathbb{Z}_n$.

Aus der Präsentation $G = \langle S \mid R \rangle$ erhalten wir so $H = \langle S' \mid R' \rangle$ mit $S' = \{a_{n-1}, b_k, c_k, \dots \mid k \in \mathbb{Z}_n\}$ und $R' = \{\tilde{r}_k \mid r \in R,\ k \in \mathbb{Z}_n\}$.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$

Beispiel: Wir betrachten die obige Coxeter–Präsentation $\mathrm{S}_n \cong P_n$. Hier erhalten wir $\alpha = \mathrm{sign}$ und $H = \mathrm{A}_n$. (1) Als Erzeuger finden wir

$$v_1 \mapsto t_1^2,\ u_i \mapsto t_i t_1^{-1},\ v_i \mapsto t_1 t_i \quad \text{für } 2 \leq i < n.$$

Das entspricht im Graphen $\tilde{K} = F \overset{\varphi}{\rtimes} K$ dem oben gewählten Spannbaum; dieser enthält u_1. (Ein anderer Spannbaum liefert etwas andere Erzeuger.)

Wir heben alle Relationen hoch: (2a) Die Relation t_1^2 hebt sich zu $v_1 \mapsto t_1^2$. Die Relation t_i^2 hebt sich zu $u_i v_i \mapsto t_i^2$ und zu $v_i u_i \mapsto t_1 t_i^2 t_1^{-1}$ für $2 \leq i < n$. (2b) Die Relation $(t_1 t_2)^3$ hebt zu $v_2^3 \mapsto (t_1 t_2)^3$ und $(v_1 u_2)^3 \mapsto t_1 (t_1 t_2)^3 t_1^{-1}$. Für $2 \leq i < n-1$ hebt sich die Relation $(t_i t_{i+1})^3$ zu $(u_i v_{i+1})^3 \mapsto (t_i t_{i+1})^3$ und $(v_i u_{i+1})^3 \mapsto t_1 (t_i t_{i+1})^3 t_1^{-1}$. (2c) Für $j \geq 3$ hebt sich die Relation $(t_1 t_j)^2$ zu $v_j^2 \mapsto (t_1 t_j)^2$ und $(v_1 u_j)^2 \mapsto t_1 (t_1 t_j)^2 t_1^{-1}$. Für $2 \leq i < j < k < n$ hebt sich die Relation $(t_i t_k)^2$ zu $(u_i v_k)^2 \mapsto (t_i t_k)^2$ und $(v_i u_k)^2 \mapsto t_1 (t_i t_k)^2 t_1^{-1}$.

☺ Damit haben wir alle Relationen von S_n zu Relationen von A_n hochgehoben, und wir erhalten eine Präsentation $\mathrm{A}_n \cong \langle S' \mid R' \rangle$.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$

Nach Vereinfachung durch Tietze–Transformationen (L3s) erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}_n & \cong & P'_n := \left\langle v_2, \dots, v_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{l} v_2^3 = (v_i v_{i+1})^3 = 1 \ \text{ für } 2 \leq i < n-1 \\ v_j^2 = (v_i v_k)^2 = 1 \ \text{ für } 2 \leq i < j < k < n \end{array} \right\rangle \\ \tau_1 \tau_i & \leftarrow\!\shortmid & v_i \end{array}$$

Zur Erinnerung: Eine Präsentation beinhaltet immer zwei Aussagen.

(1) Erzeugung: Jede gerade Permutation $\sigma \in \mathrm{A}_n$ ist ein Produkt der hier angegebenen Erzeuger $\tau_1 \tau_i \leftarrow\!\shortmid v_i$ mit $2 \leq i < n$. (Übung / Wiederholung: Zeigen Sie dies direkt! Es gelingt zum Beispiel per Induktion über n.)

(2) Äquivalenz: Die Relationen klären jede Mehrdeutigkeit. Genau dann ergeben zwei solche Produkte dieselbe Permutation $\sigma \in \mathrm{A}_n$, wenn sie durch eine Folge der angegebenen Relationen ineinander übergehen.

(2a) Machen Sie die Probe: Dass die angegebenen Relationen in A_n *gelten*, rechnen Sie leicht nach durch Einsetzen und Ausmultiplizieren in A_n.

(2b) Dass die von uns angegebenen Relationen für A_n wirklich *ausreichen*, also alle weiteren Relationen in A_n erzeugen, folgt aus obiger Rechnung.

Reidemeister–Schreier: Anwendungsbeispiel $\mathrm{A}_n \leq \mathrm{S}_n$

☺ Zur Sicherheit mache ich zwei einfache Stichproben mit GAP:

```
gap> F := FreeGroup( "v2", "v3" );;
gap> v2 := F.1;; v3 := F.2;;
gap> G := F / [ v2^3, (v2*v3)^3, v3^2 ];
<fp group on the generators [ v2, v3 ]>
gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
[ 12, "A4" ]

gap> F := FreeGroup( "v2", "v3", "v4" );;
gap> v2 := F.1;; v3 := F.2;; v4 := F.3;;
gap> G := F / [ v2^3, (v2*v3)^3, (v3*v4)^3, v3^2, v4^2, (v2*v4)^2 ];
<fp group on the generators [ v2, v3, v4 ]>
gap> [ Size(G), StructureDescription(G) ];
[ 60, "A5" ]
```

Diese Abzählung zeigt erneut, dass unsere Relationen vollständig sind: Der Gruppenhomomorphismus $h : P'_n \to \mathrm{A}_n : v_i \mapsto \tau_1 \tau_i$ ist wohldefiniert, da die Relationen in A_n gelten, und surjektiv, da $\mathrm{A}_n = \langle \tau_1 \tau_2, \dots, \tau_1 \tau_{n-1} \rangle$. Mit $\sharp P'_n \leq \sharp \mathrm{A}_n < \infty$ folgt, dass h bijektiv ist, also ein Isomorphismus.

Reidemeister–Schreier: erste Schritte zur CGT

Das Reidemeister–Schreier–Verfahren ist händisch nur für kleine oder stark strukturierte Präsentationen bequem. Es liefert zwar immer eine endliche Präsentation, doch diese gerät im Allgemeinen unhandlich groß. Die Rechnung wird dann eine Herausforderung zu guter Buchführung.

Für praktische Zwecke versucht man immer, Präsentationen möglichst weit zu vereinfachen, durch geeignete Tietze–Transformationen (L3s). Schon in unserem obigen Beispiel A_n entstehen reichlich redundante Erzeuger und Relationen, die ich anschließend fröhlich bereinigt habe.

Permutationsgruppen $G \leq \mathrm{S}_n$ und Matrixgruppen $G \leq \mathrm{GL}_n\,\mathbb{K}$ sind Ihnen schon seit Anfang Ihres Studiums vertraut. Endlich präsentierte Gruppen $G = \langle S \,|\, R \rangle$ bilden eine dritte Säule und sind der zentrale Gegenstand der kombinatorischen Gruppentheorie (CGT). Zu allen dreien gibt es sowohl strukturell-theoretisch als auch algorithmisch-praktisch sehr umfassende Werkzeuge, die erfreulich effizient ineinander greifen, und deren Anfänge Sie bereits in Ihren Grundvorlesungen bewundern können.

Reidemeister–Schreier: erste Schritte zur CGT

☺ Erfreulicherweise findet GAP sogar Präsentationen zu Erzeugern. (Die Ausgabe variiert, ich habe sie nachträglich von Hand sortiert.)

```
gap> S := [ (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) ];; Size(Group(S));
120
gap> iso := IsomorphismFpGroupByGenerators( Group(S), S );
[ (1,2), (2,3), (3,4), (4,5) ] -> [ F1, F2, F3, F4 ]
gap> fp := Image( iso );
<fp group of size 120 on the generators [ F1, F2, F3, F4 ]>
gap> RelatorsOfFpGroup( fp );
[ F1^2, F2^2, F3^2, F4^2, (F1*F2)^3, (F1*F3)^2, (F1*F4)^2, (F2*F3)^3,
    (F2*F4)^2, (F3*F4)^3 ]

gap> S := [ (1,2,3), (1,2)(3,4), (1,2)(4,5) ];; Size(Group(S));
60
gap> iso := IsomorphismFpGroupByGenerators( Group(S), S );
[ (1,2,3), (1,2)(3,4), (1,2)(4,5) ] -> [ F1, F2, F3 ]
gap> fp := Image( iso );
<fp group of size 60 on the generators [ F1, F2, F3 ]>
gap> RelatorsOfFpGroup( fp );
[ F1^3, (F1*F2)^3, (F2*F3)^3, F2^2, F3^2, (F1*F3)^2 ]
```

Rückblick auf dieses Semester

Meine Ziele und Wünsche für diese Veranstaltung:

1. Freude an Mathematik! Wir wollen unseren Spaß haben.
2. Sie engagieren sich kontinuierlich, wir betreuen Sie bestens.
3. Sie lernen wunderschöne und nützliche Mathematik.

Freuen Sie sich über schöne und nützliche Mathematik!

Einführung: Was ist und was soll die Topologie?

Analytische Topologie	**Universelle Werkzeuge**	**Geometrische Topologie**	**Algebraische Topologie**
Distanzlehre: Metrik	Kompaktheit und Kompaktifizierung	Simpliziale Komplexe	Fundamental-gruppen
Stetigkeitslehre: Topologie	Zusammenhang und Homotopie	Abbildungsgrad & Topologie des $\mathbb{R}^n$	Überlagerungen
Topologische Konstruktionen	Die Sprache der Kategorien	Klassifikation der Flächen	*Into the great wide open …*

Freuen Sie sich über schöne und nützliche Mathematik!

Herr: es ist Zeit. Das Semester war lang.
Befiehl den letzten Sätzen wahr zu sein.

frei nach Rainer Maria Rilke (1875–1926), *Herbsttag*

Auch diese Vorlesung kommt zu ihrem guten Ende. Sie war so angelegt, dass wir ehrliche Beispiele und die schöne Theorie zugleich aufbauen. Das ist anstrengend, doch lohnend. Zahlreiche Illustrationen aus der Vorlesung und Übungsaufgaben zeigen Ihnen konkrete Anwendungen. Mit Hilfe topologischer Konstruktionen und Obstruktionen können Sie Probleme präzise erfassen und elegant lösen. Darauf dürfen Sie stolz sein.

Echte Mathematik ist immer beides: sowohl abstrakte Theorie als auch konkrete Anwendung. Sie sind keine Gegensätze, sondern sie ergänzen sich, die eine kann nur mit der anderen dauerhaft erfolgreich sein. Mathematik klärt und quantifiziert Zusammenhänge: Das ist ihr Nutzen! Dank Abstraktion ist sie universell anwendbar: Das ist ihre Stärke!

Freuen Sie sich über schöne und nützliche Mathematik!

Das Wort „abstrakt“ missbraucht der Ignorant gern als Schimpfwort für alles, worüber ihm die Kenntnis fehlt oder wovor er die Mühe scheut. Gute Abstraktion strukturiert und vereinfacht; eine allgemeine Tatsache ist oft leichter zu verstehen und zu erklären als ihre verwunderlichen Spezialfälle. Die sollen Sie natürlich nicht ignorieren, sondern richtig verstehen; hierzu brauchen Sie Überblicks- und Detailwissen zugleich.

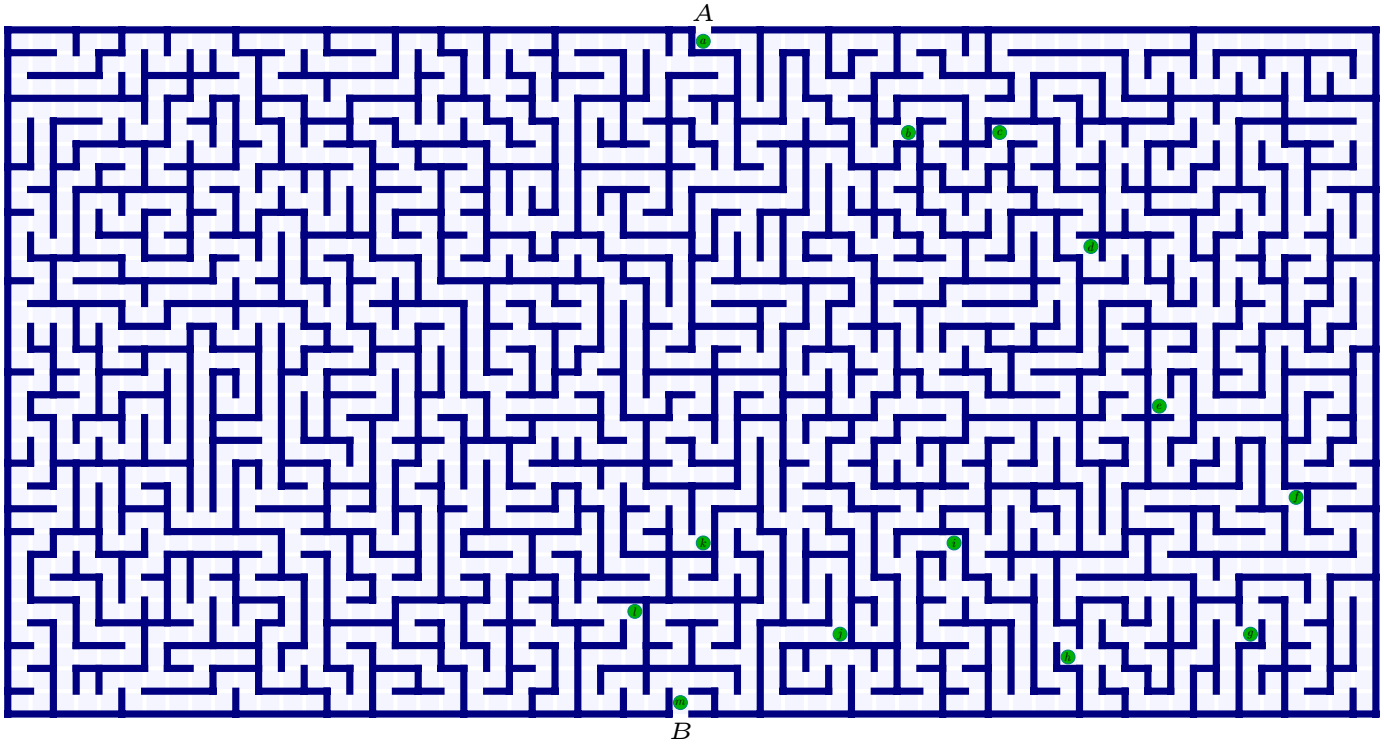
Gerade zur Fundamentalgruppe ist die abstrakte Definition erfreulich leicht, doch jede ernsthafte Anwendungen erfordert redliche Mühe. Das spüren Sie deutlich; abstrakt ist leicht, konkret ist schwer. Freuen Sie sich also über jedes abstrakte Werkzeug, das ihre konkrete Arbeit erleichtert.

Abstraktion ist die Kunst, Wesentliches von Unwesentlichem zu trennen. Sie dient der Denkökonomie: Daten ändern sich, Methoden bestehen. Theorie und Anwendung arbeiten nur gemeinsam effizient zusammen, wie linke und rechte Hand. Geben Sie sich auch in Zukunft nicht mit weniger zufrieden! Bleiben Sie ehrlich, neugierig, engagiert!

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

M537

Ich führe Argumente sorgsam vor. Sie arbeiten alles gründlich nach.



Ich zeige Ihnen den Weg von A nach B. Dazu teilen wir uns die Arbeit: Ich erkläre die wesentlichen Etappen. Sie ergänzen und klären Details.

Arbeitsteilung zwischen Lehren und Lernen

M538
Erläuterung

Studieren fordert und fördert Ihr eigenständiges Arbeiten. Ich stecke den Weg für Sie ab, weder zu weit noch zu eng, gehen müssen Sie ihn selbst. Das rechte Maß für Sie zu finden ist schwierig, aber möglich… im Dialog, als Gemeinschaft der Lehrenden und Lernenden. Das ist Universität!

Es geht nicht darum, dass Dozierende ihren Studis Wissen „eintrichtern“ oder sich Studierende rein passiv „aufschlauen“ lassen. Viele Studierende beklagen zurecht das „Bulimie-Lernen“, doch praktizieren genau das. Auch wenn manche sich „Studium“ so vorstellen: Das ist verkehrt!

Studieren bedeutet sich zu bemühen, seine Neugier zu pflegen, sich aktiv Wissen und Können anzueignen und wissenschaftlich zu betätigen. Wir schaffen für Sie einen förderlichen Rahmen, in dem dies gelingt. Oft wird diese Mühe verachtet. Manchmal fruchtet sie tatsächlich.

Erkläre es mir, und ich werde es vergessen.
Zeige es mir, und ich werde mich erinnern.
Lass es mich tun, und ich werde es verstehen.
Konfuzius (551–497 v.u.Z.)

Was macht die Topologie so einzigartig?

Viele halten die Topologie für abstrakt und schwierig,
doch nur Wenige haben Recht!

Sie wissen aus Erfahrung: Analysis ist konkret… und dadurch beliebig kompliziert. Lineare Algebra ist abstrakt… und dadurch meist einfach. Die Topologie ist beides: wunderbar abstrakt und vollkommen konkret! Mathematik zu studieren ist harte, ehrliche Arbeit… und es lohnt sich.

Erfahrungsgemäß bereitet die Topologie Teilnehmer:innen nachhaltig Freude, vielleicht gelingt dieses Wunder erneut, zumindest im Rückblick, wenn Sie merken wie Sie mit dieser Herausforderung gewachsen sind. Sie lernen schrittweise eine umfassendere Sicht auf die Mathematik.

We choose to study Topology this very semester,
not because it is easy, but because it is hard,
because that goal will serve to organize and
measure the best of our energies and skills.

frei nach John F. Kennedy (1917–1963)

Zum guten Schluss

Nun habe ich [ein Semester] lang zu Ihnen gesprochen und werde jetzt damit aufhören. Einerseits möchte ich mich entschuldigen und andererseits wieder nicht. Ich hoffe – ja, ich weiß –, dass [einige] von Ihnen allem mit großer Spannung folgen konnten und eine angenehme Zeit damit verbracht haben. Aber ich weiß auch, dass die Kräfte der Lehre von sehr geringer Wirkung sind, außer unter jenen glücklichen Umständen, in denen sie praktisch überflüssig sind. Daher darf ich im Hinblick auf die[jenigen], die alles verstanden haben, sagen, dass ich nichts anderes getan habe, als Ihnen die Dinge zu zeigen. Was die anderen betrifft, tut es mir leid, wenn ich Ihren Widerwillen gegen dieses Fachgebiet erregt habe. […] Ich hoffe nur, dass ich Sie nicht ernsthaft verwirrt habe, und dass Sie dieses interessante Geschäft nicht aufgeben. Ich hoffe, dass jemand anderes es Ihnen so beibringen kann, dass es Ihnen nicht im Magen liegt, und dass sie trotz allem eines Tages feststellen, dass es nicht so schrecklich ist, wie es aussieht.

nach R. P. Feynman (1918–1988), Epilog seiner *Vorlesungen über Physik*